

あの体系で subformula property を持つ証明図を得る簡約

(2000 年 3 月 1 日 鹿島 亮)

[定義]

推論規則は wk, eli, case の 3 種.

$$\frac{B}{A \rightarrow B} \text{ (wk)} \quad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \text{ (eli)} \quad \frac{\begin{array}{c} [A \rightarrow B] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \text{ (case)}$$

キャンセルは角括弧で表す. case 規則における $[A \rightarrow B]$ を「左キャンセル」, $[A]$ を「右キャンセル」と言う.

[注意]

仮定がキャンセルされる通常の $\rightarrow$ 導入規則は case 規則と wk 規則で実現できる.

[定義]

簡約は case-wk, 左 case-elli, 右 case-eli, K, γ , case 消し の 6 種.

$$\begin{array}{ccc} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array}}{B} \text{ (case)} & \xRightarrow{\text{case-wk}} & \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \text{ (wk)} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \text{ (wk)} \\ \frac{\quad}{A \rightarrow B} \text{ (wk)} & & \frac{\quad}{A \rightarrow B} \text{ (case)} \\ \\ \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \rightarrow B \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \rightarrow B \end{array}}{A \rightarrow B} \text{ (case)} \quad \frac{\quad}{A} \text{ (eli)} & \xRightarrow{\text{左 case-eli}} & \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \rightarrow B \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}}{B} \text{ (eli)} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \rightarrow B \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}}{B} \text{ (eli)} \\ \frac{\quad}{B} & & \frac{\quad}{B} \text{ (case)} \\ \\ \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \rightarrow B \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}}{A} \text{ (case)}}{B} \text{ (eli)} & \xRightarrow{\text{右 case-eli}} & \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \rightarrow B \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}}{B} \text{ (eli)} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \rightarrow B \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}}{B} \text{ (eli)} \\ \frac{\quad}{B} & & \frac{\quad}{B} \text{ (case)} \\ \\ \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \text{ (wk)} \quad \frac{\quad}{A} \text{ (eli)} & \xRightarrow{\text{K}} & \begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\vdots \mathcal{P} \\
[A \rightarrow B]^k \quad A \text{ (eli)} \\
\hline
B \\
\vdots \mathcal{Q} \\
C \\
\vdots \mathcal{R} \\
C
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
[A]^k \quad S \\
\vdots \\
C \text{ (case)}^k
\end{array} \\
\hline
C
\end{array}
\quad
\gamma \Rightarrow
\quad
\begin{array}{c}
\vdots \mathcal{P} \\
A \quad S \\
\vdots \\
C \quad R \\
\vdots \\
C \quad S \\
\hline
C \text{ (case)}^k
\end{array}$$

ただし γ 簡約においては, $\mathcal{Q}$ 中の B から C の間には case 規則は無いとする (もしもそこに case 規則があると, 簡約することによって「キャンセルされていない仮定」が $\mathcal{P}$ 中で増えてしまうことがある). また, $\mathcal{R}$ 中の C から C の間には case 以外の規則は無いとする.

$$\begin{array}{c}
[A]^k \\
\vdots \mathcal{Q} \\
C \text{ (case)}^k \\
\vdots
\end{array}
\quad
\text{case 消し} \Rightarrow
\quad
\begin{array}{c}
\vdots \mathcal{P} \\
C \\
\vdots
\end{array}$$

ただし case 消し簡約においては, $\mathcal{P}$ 中に $(\text{case})^k$ によって左キャンセルされる仮定は無いとする (もしあったら, 簡約することによって「キャンセルされていない仮定」が増えてしまう).

[簡約の例]

通常の β 簡約に相当する例.

$$\begin{array}{c}
[A]^1 \\
\vdots \mathcal{P} \\
B \\
[A \rightarrow B]^1 \quad A \rightarrow B \text{ (wk)} \\
\hline
A \rightarrow B \text{ (case)}^1 \quad A \text{ (eli)}
\end{array}
\quad
\text{左 case-eli} \Rightarrow
\quad
\begin{array}{c}
[A]^1 \\
\vdots \mathcal{P} \\
B \\
[A \rightarrow B]^1 \quad A \text{ (eli)} \\
\hline
B \text{ (case)}^1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
[A]^1 \\
\vdots \mathcal{Q} \\
B \\
[A \rightarrow B]^1 \quad A \text{ (eli)} \\
\hline
B \text{ (case)}^1
\end{array}
\quad
\gamma \Rightarrow
\quad
\begin{array}{c}
\vdots \mathcal{Q} \\
A \quad \mathcal{P} \\
\vdots \mathcal{P} \\
B \quad B \text{ (case)}^1 \\
\hline
B
\end{array}
\quad
\text{case 消し} \Rightarrow
\quad
\begin{array}{c}
\vdots \mathcal{Q} \\
A \\
\vdots \mathcal{P} \\
B
\end{array}$$

[定義]

case-wk 簡約, 左 case-eli 簡約, 右 case-eli 簡約のどれも適用できない証明図 (すなわ

ち case 規則がすべて沈殿している証明図) のことを下正規形と呼ぶ.

[定理 1]

すべての証明図は下正規形を持つ. (すなわち, どんな証明図もうまく簡約して下正規形にたどり着くことができる.)

この定理のために補題を用意する.

[補題 2]

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ が下正規形ならば

$$\frac{\frac{\vdots \mathcal{P}}{F \rightarrow G} \quad \frac{\vdots \mathcal{Q}}{F}}{G} \text{ (eli)}$$

という形の証明図は下正規形を持つ.

[補題 2 の証明]

こういう形の証明図のサイズ (出現論理式の総数) に関する帰納法による. **[証明終]**

[定理 1 の証明]

証明図のサイズに関する帰納法による. (最後の規則が eli のときに補題 2 を用いる.)

[証明終]

[定義]

6 種類の簡約のどれも適用できない証明図を正規形と呼ぶ.

[定理 3]

下正規な証明図は正規形を持つ.

[定義]

証明図中で次の 2 条件を満たす含意式 ($A \rightarrow B$ という形の論理式) の出現のことを redex と呼ぶ.

- その含意式は wk 規則の下式になっているか, または case 規則で左キャンセルされる仮定である.
- その含意式は eli 規則の左上式 (major premise) になっている.

[定理 3 の証明]

K 簡約と γ 簡約は共に redex を消す簡約である. また逆に, 下正規な証明図におい

ては redex は必ず K 簡約または γ 簡約によって消すことができる. (下正規でない
と, redex であっても γ 簡約の左辺の形になっていない場合がある.) したがって, 下
正規形における K 簡約 / γ 簡約は「着目した任意の redex を消す手続き (その結果
新たな redex が生じることはあるが)」と見なせる. さて, いま下正規形に対して次
の簡約戦略を考える.

一番長い redex をすべて見つけ, その中で一番右にあるものを簡約 (K 簡
約または γ 簡約) する.

この簡約によって, 消した redex の長さ以上の長さを持つ redex が増えることがな
いことは, 確認できる. したがって, これを繰り返せば「それ以上 K 簡約も γ 簡約も
できない証明図」に至る. また, 下正規形を K 簡約, γ 簡約しても下正規形のままだ
ので, この戦略で至る証明図には, もはや case 消し簡約しか施せない. そこで, 後は
case 消し簡約をできるだけやっていたら正規形に至る. (下正規形を case 消し簡約
しても新たな redex は生じない.) [証明終]

[定理 4]

正規な証明図は subformula property を持つ. (すなわち, 正規な証明図中に出現す
るどんな論理式も, その結論の部分式であるかまたはキャンセルされていないどれ
かの仮定の部分式である.)

[定理 4 の証明]

正規な証明図には K 簡約を施すことができないので, その「LJ 部分」—すべての
case 規則を取り去って得られる部分証明図達—はそれぞれ subformula property を
持つことがすぐにわかる. したがって次が成り立つ.

[性質 5] 正規な証明図中に出現する任意の formula は, その証明図中の

- 結論
- キャンセルされない仮定
- case 規則でキャンセルされる仮定

のどれかの部分式である.

さて, 今 $\mathcal{P}$ を正規な任意の証明図とし, 論理式の集合 Γ を

$\Gamma = \{F \mid F \text{ は } \mathcal{P} \text{ 中で case 規則によってキャンセルされ, かつ } F \text{ は } \mathcal{P}$
の結論の部分式でもないしキャンセルされない仮定の部分式でもない. }

とする. この Γ が空集合であることを示せば, 性質 5 と併せて, 定理 4 が証明されたことになる. そこで, 以下では Γ が空でないと仮定して矛盾を導く.

Γ が空でないとする, 以下を満たす「 Γ の極大要素」 X が存在する.

- $X \in \Gamma$.
- X を真部分式として含むどんな論理式も Γ の要素でない.

すると X はある case 規則で左キャンセルされているはずである. (なぜなら, もし右キャンセルしかされないとすると「 Γ における X の極大性」と「case 消し簡約が施せないこと (正規形であること)」が矛盾する.) そこで, 左キャンセルされている X のひとつに着目し, その直後の推論規則によって場合分けする.

[X が wk 規則の上式, または eli 規則の右上式になっている場合]

X を真部分式として含む論理式が出現して, 「 Γ における X の極大性」と性質 5 から矛盾が導かれる.

[X が eli 規則の左上式になっている場合]

X は redex であり, $\mathcal{P}$ が正規であることに反する.

[X が case 規則の上式になっている場合]

X は証明図の結論と同じ論理式なので, $X \in \Gamma$ に反する. **[証明終]**

[考察]

case 規則を

$$\frac{\begin{array}{c} [A \rightarrow B_1], \dots, [A \rightarrow B_n] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \text{ (case)}$$

に強め, γ 簡約を次の 4 種に分業化しても同様にできる (と思う).

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{[A \rightarrow B]^k \quad A}{B} \text{ (eli)}}{C \rightarrow B} \text{ (wk)} \\ \vdots \\ F \end{array} \quad \frac{\vdots}{F} \text{ (case)}^k \quad \frac{\vdots}{F} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \frac{[A \rightarrow C \rightarrow B]^k \quad A}{C \rightarrow B} \text{ (eli)} \\ \vdots \\ F \end{array} \quad \frac{\vdots}{F} \text{ (case)}^k \quad \frac{\vdots}{F}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{[A \rightarrow B \rightarrow C]^k}{B \rightarrow C} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array} \text{ (eli)}}{C} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array} \text{ (eli)}}{F} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ F \end{array}}{F} \text{ (case)}^k \\
\Rightarrow
\end{array}
\begin{array}{c}
\frac{[A \rightarrow C]^k}{C} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array} \text{ (eli)}}{F} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ F \end{array}}{F} \text{ (case)}^k \\
\vdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ B \rightarrow C \end{array} \frac{[A \rightarrow B]^k}{B} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array} \text{ (eli)}}{C} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ F \end{array}}{F} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ F \end{array}}{F} \text{ (case)}^k \\
\Rightarrow
\end{array}
\begin{array}{c}
\frac{[A \rightarrow C]^k}{C} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array} \text{ (eli)}}{F} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ F \end{array}}{F} \text{ (case)}^k \\
\vdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{[A \rightarrow C]^k}{C} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \mathcal{P} \\ A \end{array} \text{ (eli)}}{C} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (case) \text{ の } \mathcal{S} \end{array}}{C} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ [A]^k \\ \mathcal{S} \end{array}}{C} \text{ (case)}^k \\
\Rightarrow
\end{array}
\begin{array}{c}
\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \mathcal{P} \\ A \end{array} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \mathcal{S} \end{array}}{C} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (case) \text{ の } \mathcal{S} \end{array}}{C} \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ [A]^k \\ \mathcal{S} \end{array}}{C} \text{ (case)}^k \\
\vdots
\end{array}$$