

中間述語論理 CD の完全性証明

2002 年 9 月 鹿島 亮

概要

中間述語論理 **CD** の定領域 Kripke モデルに対する完全性の、極大無矛盾集合を用いたオーソドックスな証明法 — 極大無矛盾集合を各可能世界とするモデルを構成するという方法 — を紹介する。

1 序

直観主義述語論理に公理 **D**: $\forall x(A \vee B) \rightarrow (A \vee \forall x B)$ (ただし x は A に現われない) を加えた中間述語論理 (すなわち、直観主義述語論理と古典述語論理との間に位置する論理) を **CD** と呼ぶ。 **CD** が「定領域 Kripke モデル」に対して完全であることは従来知られており、たとえば文献 [3] において筆者は「Tree Sequent」を用いた **CD** の完全性証明を紹介した (この方法は小野 [4] によりなされている)。

ところで文献 [3] において筆者は、「極大無矛盾集合 (飽和シークエント) をばらばらに作って、それらを各可能世界とするモデルを作る」という従来のオーソドックスな方法で **CD** の完全性を示すことは、

あるノードでの拡大作業によって新たに生じた自由変数を、そのノードより先祖にフィードバックさせることが困難なのでうまくいかない

と書いた。しかしこれは嘘である。そのようなオーソドックスな方法で **CD** の完全性が証明できることは Görnemann [2] により言及されており、Gabbay [1] に詳細に書かれている。(Thomason [5] も公理 **D** を持つ論理 (“constructible falsity”) の完全性を示しており、本質的な部分は同じである。) 本稿の目的は、この完全性証明を正確かつ簡潔に与えることである。

この証明のポイントは、本稿で ω -closed-finite-consistent と呼ぶ概念 (Definition 3.5) を用いて、変数集合を拡大せずに極大無矛盾集合を作ること — Main Lemma 3.6(2), およびそのための Lemma 3.10, 3.11, 3.12 — である。

2 定義

一階述語論理の可算言語を扱う。簡単のため、定数記号や関数記号は無いとする。論理記号は $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$ である。述語記号は p, q 等で表し、変数は x, y 等で表し、論理式は A, B 等で表す。 $A[y/x]$ は論理式 A 中の x の自由出現を y に書き換えたものである。この節では Γ, Δ 等は論理式の有限集合を表す。通常通り Γ, A は $\Gamma \cup \{A\}$ を意味する。シークエントとは $\Gamma \Rightarrow \Delta$ という形の表現である。

CD のシーケント計算はいくつかあるが、以下のものが最も昔から知られている。

公理: $A \Rightarrow A$

推論規則:

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (cut)} \\
\\
\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (weakening 左)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \text{ (weakening 右)} \\
\\
\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\wedge \text{左}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} (\wedge \text{右}) \\
\\
\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\vee \text{左}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} (\vee \text{右}) \\
\\
\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\rightarrow \text{左}) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B} (\rightarrow \text{右}) \\
\\
\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\neg \text{左}) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg A} (\neg \text{右}) \\
\\
\frac{A[y/x], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\forall \text{左}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[y/x]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A} (\forall \text{右})^\dagger \\
\\
\frac{A[y/x], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\exists \text{左})^\dagger \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[y/x]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A} (\exists \text{右})
\end{array}$$

($\dagger$) ただし ($\forall$ 右), ($\exists$ 左) においては y は下式に現れない変数である。

この体系でシーケント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明できることを

$$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$$

と書く。また、 $\vdash \Rightarrow A$ のとき、単に

$$\vdash A$$

と書く。

注意: (1) この体系では cut 規則は真に必要であり、除去できない。

(2) ($\rightarrow$ 右) と ($\neg$ 右) が、「シーケントの右辺に現われる論理式が一つ以下」という形になっている。(4) にもこの制限を課せば直観主義論理になり、逆にこの制限をすべて無くせば古典論理になる。

(3) シーケントの両辺が集合なので、contraction, exchange は不要である。

CD の Kripke モデル (定領域モデル) とは以下の性質を持つ組 $\langle W, \leq, D, I, \sigma \rangle$ である。

- $\langle W, \leq \rangle$ は順序集合 (可能世界の集合).
- D は非空集合 (変数の指す対象領域).
- I は各述語記号の各世界における意味を定めるもの. n 変数述語記号 p と $\alpha \in W$ に対して, その意味 $p^{I(\alpha)}$ は D 上の n 変数述語であり, 次の性質を満たすものとする. D の任意の要素 $d_1, \dots, d_n$ と W の任意の要素 α, β に対して,

$$\left[\alpha \leq \beta, \text{かつ } p^{I(\alpha)}(d_1, \dots, d_n) \text{ が真} \right] \implies p^{I(\beta)}(d_1, \dots, d_n) \text{ が真}$$

- σ は各変数が対象領域のどの要素を指しているかを定めるもの (「環境」と呼ぶ) である. 変数 x に対して, その指す先 (D の要素) を x^σ と書く. 一般に, 環境 τ に対して環境 $\tau[d/y]$ (ただし d は対象領域のある要素) を以下で定める.

$$x^{\tau[d/y]} = \begin{cases} x^\tau & \text{if } x \neq y \\ d & \text{if } x \equiv y \end{cases}$$

つまり $\tau[d/y]$ は τ の y が指す先だけを d に変更した環境である.

論理式 A が可能世界 α , 環境 σ で成り立つということ (これを $\alpha, \sigma \models A$ と表記する) を以下で定義する.

$$\begin{aligned} \alpha, \sigma \models p(x_1, \dots, x_n) &\iff p^{I(\alpha)}(x_1^\sigma, \dots, x_n^\sigma) \text{ が真.} \\ \alpha, \sigma \models A \wedge B &\iff \alpha, \sigma \models A \text{ かつ } \alpha, \sigma \models B. \\ \alpha, \sigma \models A \vee B &\iff \alpha, \sigma \models A \text{ または } \alpha, \sigma \models B. \\ \alpha, \sigma \models A \rightarrow B &\iff \alpha \leq \beta \text{ なる任意の } \beta \text{ に対して,} \\ &\quad \left[\beta, \sigma \not\models A \text{ または } \beta, \sigma \models B \right]. \\ \alpha, \sigma \models \neg A &\iff \alpha \leq \beta \text{ なる任意の } \beta \text{ に対して, } \beta, \sigma \not\models A. \\ \alpha, \sigma \models \forall x A &\iff \text{任意の } d \in D \text{ に対して, } \alpha, \sigma[d/x] \models A. \\ \alpha, \sigma \models \exists x A &\iff \text{ある } d \in D \text{ が存在して, } \alpha, \sigma[d/x] \models A. \end{aligned}$$

本稿の目的は次の定理の証明を与えることである

Theorem 2.1 (CD の完全性)

$$\left[\text{任意のモデルの任意の可能世界 } \alpha, \text{ 任意の環境 } \sigma \text{ に対して, } \alpha, \sigma \models A \right] \implies \vdash A.$$

(注意: 逆 (健全性) は普通に示される.)

3 極大無矛盾集合の作り方

これ以降は Γ, Δ 等は論理式の可算集合 (有限または可算無限) を表す.

Definition 3.1 論理式の集合のペア $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ が無矛盾 $\iff \Gamma$ の任意の有限部分集合 Γ' および Δ の任意の有限部分集合 Δ' に対して, $\nvdash \Gamma' \Rightarrow \Delta'$.

Definition 3.2 $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ が $\exists\forall$ -極大無矛盾である $\iff$ 以下の4条件が成り立つ:

- (無矛盾性): $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ は 無矛盾.
- (極大性): 任意の論理式 A に対して, $\left[A \in \Gamma \text{ または } A \in \Delta \right]$.
- (左 $\exists$ 特性): $\exists$ で始まる任意の論理式 $\exists xA$ に対して, $\left[\exists xA \in \Gamma \text{ ならばある変数 } y \text{ が存在して } A[y/x] \in \Gamma \right]$.
- (右 $\forall$ 特性): $\forall$ で始まる任意の論理式 $\forall xA$ に対して, $\left[\forall xA \in \Delta \text{ ならばある変数 } y \text{ が存在して } A[y/x] \in \Delta \right]$.

Definition 3.3 $\Gamma \vdash A \iff \Gamma$ のある有限部分集合 Γ' に対して $\vdash \Gamma' \Rightarrow A$.

Definition 3.4 Γ が ω -closed $\iff \forall$ で始まる任意の論理式 $\forall xA$ に対して, $\left[\Gamma \vdash A[y/x] \text{ が任意の } y \text{ について成り立つならば } \Gamma \vdash \forall xA \right]$.

Definition 3.5 $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ が ω -closed-finite-consistent である (ωfc と略) $\iff \Gamma$ は ω -closed で, Δ は有限で, かつ $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ は無矛盾.

Lemma 3.6 (Main Lemma)

- (1) $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ が無矛盾で, Γ にも Δ にも現われない変数が無限個存在するならば, $\Gamma^+ \supseteq \Gamma, \Delta^+ \supseteq \Delta$ で $\exists\forall$ -極大無矛盾な $\langle \Gamma^+; \Delta^+ \rangle$ が存在する.
- (2) $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ が ωfc ならば, $\Gamma^+ \supseteq \Gamma, \Delta^+ \supseteq \Delta$ で $\exists\forall$ -極大無矛盾な $\langle \Gamma^+; \Delta^+ \rangle$ が存在する.

Proof (1)(2) ともに以下の作り方で $\langle \Gamma^+; \Delta^+ \rangle$ を構成する.

はじめにすべての論理式を並べておいて, これを $F_1, F_2, \dots$ と呼ぶ. 以下で論理式の集合のペアの列 $\langle \Gamma_0; \Delta_0 \rangle, \langle \Gamma_1; \Delta_1 \rangle, \dots$ を定義し, 最終的に

$$\langle \Gamma^+; \Delta^+ \rangle = \left\langle \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n; \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n \right\rangle$$

とする.

[ステップ 0] $\langle \Gamma_0; \Delta_0 \rangle = \langle \Gamma; \Delta \rangle$.

[ステップ n ($n \geq 1$)] $\langle \Gamma_{n-1}; \Delta_{n-1} \rangle$ が定義されているとき,

(†) $\langle \Gamma_{n-1}, F_n; \Delta_{n-1} \rangle$

(‡) $\langle \Gamma_{n-1}; \Delta_{n-1}, F_n \rangle$

のうち無矛盾な方を $\langle \Gamma_n; \Delta_n \rangle$ とする. ただし, 以下の 2 つの場合はさらに必要な論理式を追加する:

- F_n が $\exists$ から始まる論理式 $\exists xA$ で (†) が採用されたとき. この場合は, 左辺にさらに $A[y/x]$ を追加しても全体が無矛盾のままであるような y を持って来て, これを追加する. すなわち無矛盾な

$$\langle \Gamma_{n-1}, \exists xA, A[y/x]; \Delta_{n-1} \rangle$$

を $\langle \Gamma_n; \Delta_n \rangle$ とする.

- F_n が $\forall$ から始まる論理式 $\forall xA$ で (‡) が採用されたとき. この場合は, 右辺にさらに $A[y/x]$ を追加しても全体が無矛盾のままであるような y を持って来て, これを追加する. すなわち無矛盾な

$$\langle \Gamma_{n-1}; \Delta_{n-1}, \forall xA, A[y/x] \rangle$$

を $\langle \Gamma_n; \Delta_n \rangle$ とする.

以上の定義が可能であるならば (すなわち「無矛盾なもの」が常に存在するならば), こうしてできた $\langle \Gamma^+; \Delta^+ \rangle$ が $\exists\forall$ -極大無矛盾であることは簡単に確認できる. そこで以下では, 上の定義が可能であることを示す. そのためには, 構成の途中で出現するペア

$$\langle \Gamma_{n-1}; \Delta_{n-1} \rangle, \langle \Gamma_{n-1}, F_n; \Delta_{n-1} \rangle, \langle \Gamma_{n-1}; \Delta_{n-1}, F_n \rangle, \langle \Gamma_{n-1}, \exists xA, A[y/x]; \Delta_{n-1} \rangle, \langle \Gamma_{n-1}; \Delta_{n-1}, \forall xA, A[y/x] \rangle$$

などがすべて,

- 無矛盾, かつそこに現われない変数が無限個あること ((1) の場合)
- ω fc であること ((2) の場合)

を示す. そしてこれらは, 以下の補題 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 により示される.

Lemma 3.7 $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ が無矛盾ならば, $\langle \Gamma, A; \Delta \rangle$ と $\langle \Gamma; \Delta, A \rangle$ のどちらかは無矛盾である.

Proof cut 規則などにより明らか.

Lemma 3.8 $\langle \Gamma, \exists x A; \Delta \rangle$ が無矛盾で y がここに現われない変数ならば, $\langle \Gamma, \exists x A, A[y/x]; \Delta \rangle$ は無矛盾である.

Proof $\exists$ 左規則などにより明らか.

Lemma 3.9 $\langle \Gamma; \Delta, \forall x A \rangle$ が無矛盾で y がここに現われない変数ならば, $\langle \Gamma; \Delta, \forall x A, A[y/x] \rangle$ は無矛盾である.

Proof $\forall$ 右規則などにより明らか.

Lemma 3.10 Γ が ω -closed ならば $\Gamma \cup \{A\}$ も ω -closed である.

Proof Γ が ω -closed であることを仮定して,

$$\text{任意の } y \text{ について, } \Gamma, A \vdash B[y/x] \quad (1)$$

であるときに,

$$\Gamma, A \vdash \forall x B \quad (\dagger)$$

となることを示す. はじめに一般性を失うこと無く, x は A に現われないと仮定する. (もしも現われる場合は, A, B 共に現われない変数 x' を用意して, $B' \equiv B[x'/x]$ とし, B の代わりに B' を, $\forall x B$ の代わりに $\forall x' B'$ を用いればよい. $\vdash \forall x B \leftrightarrow \forall x' B'$ であることなどから, この入れ替えた形での条件 (1) および $(\dagger)$ は元の (1) および $(\dagger)$ と同値である.) さて, (1) と変数に関する仮定から

$$\text{任意の } y \text{ について, } \Gamma \vdash (A \rightarrow B)[y/x]$$

となり, Γ が ω -closed であることから

$$\Gamma \vdash \forall x (A \rightarrow B) \quad (2)$$

となる. 一方

$$\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B) \quad (3)$$

である (x が A に現われないから). すると (2)(3) から (†) が導かれる. ■

Lemma 3.11 $\langle \Gamma, \exists x A; \Delta \rangle$ が ωfc ならば, ある変数 y に対して $\langle \Gamma, \exists x A, A[y/x]; \Delta \rangle$ は無矛盾である.

Proof $\langle \Gamma, \exists x A; \Delta \rangle$ が ωfc であるとする. このとき,

$$\text{任意の変数 } y \text{ に対して } \langle \Gamma, \exists x A, A[y/x]; \Delta \rangle \text{ は矛盾する} \quad (1)$$

と仮定すると矛盾が生じることを示す. はじめに一般性を失うこと無く, x は Δ に現われないと仮定する. (もしも現われる場合は, Lemma 3.10 の証明と同様に, A, Δ に現われない変数 x' を用意して, $A' \equiv A[x'/x]$ として, A の代わりに A' を, $\exists x A$ の代わりに $\exists x' A'$ を用いればよい.) さて (1) と変数に関する仮定から

$$\text{任意の変数 } y \text{ に対して, } \Gamma \vdash ((\exists x A \wedge A) \rightarrow \bigvee \Delta)[y/x] \quad (2)$$

(ただし $\bigvee \Delta$ は Δ の要素をすべて $\vee$ でつないだ論理式であり, Δ が空の場合は (2) は $\Gamma \vdash \neg(\exists x A \wedge A)[y/x]$ とする) となる. すると Γ が ω -closed であることから

$$\Gamma \vdash \forall x((\exists x A \wedge A) \rightarrow \bigvee \Delta) \quad (3)$$

となる. 一方

$$\vdash \forall x((\exists x A \wedge A) \rightarrow \bigvee \Delta) \rightarrow (\exists x A \rightarrow \bigvee \Delta) \quad (4)$$

である (x が $\bigvee \Delta$ に現われないから). すると (3)(4) から

$$\Gamma, \exists x A \vdash \bigvee \Delta$$

を得るが, これは $\langle \Gamma, \exists x A; \Delta \rangle$ の無矛盾性に反する. ■

Lemma 3.12 $\langle \Gamma; \Delta, \forall x A \rangle$ が ωfc ならば, ある変数 y に対して $\langle \Gamma; \Delta, \forall x A, A[y/x] \rangle$ は無矛盾である.

Proof Lemma 3.11 と同様. (2) に対応するのが

$$\text{任意の変数 } y \text{ に対して, } \Gamma \vdash (\bigvee \{\Delta, \forall x A, A\})[y/x] \quad (2)$$

であり, (4) に対応するのが

$$\vdash \forall x(\bigvee \{\Delta, \forall x A, A\}) \rightarrow \bigvee \{\Delta, \forall x A\} \quad (4)$$

となる. (**注意:** Lemma 3.11, 3.12 の証明中で, この (4) のみが直観主義論理では使えない CD 固有の推論である.) ■

4 カノニカルモデルによる完全性証明

Lemma 4.1 $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ が $\exists\forall$ -極大無矛盾ならば、以下が成り立つ.

- (1) $A \wedge B \in \Gamma \iff [A \in \Gamma \text{ かつ } B \in \Gamma].$
- (2) $A \vee B \in \Gamma \iff [A \in \Gamma \text{ または } B \in \Gamma].$
- (3) $\forall x A \in \Gamma \iff$ 任意の y に対して $A[y/x] \in \Gamma.$
- (4) $\exists x A \in \Gamma \iff$ ある y が存在して $A[y/x] \in \Gamma.$
- (5) $[A \rightarrow B \in \Gamma \text{ かつ } A \in \Gamma] \implies B \in \Gamma.$
- (6) $[\neg A \in \Gamma \text{ かつ } A \in \Gamma]$ となることはない.

Proof (1),(2),(3 $\Rightarrow$),(4 $\Leftarrow$),(5),(6) は、次のシークエントが証明可能であることと $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ の極大性と無矛盾性から言える.

$$\begin{aligned} A \wedge B \Rightarrow A, \quad A \wedge B \Rightarrow B, \quad A, B \Rightarrow A \wedge B, \quad A \vee B \Rightarrow A, B, \quad A \Rightarrow A \vee B, \\ B \Rightarrow A \vee B, \quad \forall x A \Rightarrow A[y/x], \quad A[y/x] \Rightarrow \exists x A, \quad A \rightarrow B, A \Rightarrow B, \quad \neg A, A \Rightarrow. \end{aligned}$$

(3 $\Leftarrow$) は $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ の極大性、右 $\forall$ 特性、無矛盾性から言える. (4 $\Rightarrow$) は左 $\exists$ 特性である. ■

Lemma 4.2 $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ が $\exists\forall$ -極大無矛盾ならば、 Γ は ω -closed である.

Proof $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ は $\exists\forall$ -極大無矛盾であるとする. このとき、 $\Gamma \not\vdash \forall x A$ を仮定すると、ある y に対して $\Gamma \not\vdash A[y/x]$ となることを示す. 仮定から $\forall x A \notin \Gamma$ であり、 $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ の極大性と右 $\forall$ 特性から、ある y に対して $A[y/x] \in \Delta$ となる. すると $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ の無矛盾性から、この y については $\Gamma \not\vdash A[y/x]$ となる. ■

Definition 4.3 以下の $\langle W, \leq, \mathbf{V}, I, \text{id} \rangle$ を CD のカノニカルモデルと呼ぶ.

- $W = \{ \langle \Gamma; \Delta \rangle \mid \langle \Gamma; \Delta \rangle \text{ は } \exists\forall\text{-極大無矛盾} \}.$
- $\langle \Gamma; \Delta \rangle \leq \langle \Pi; \Sigma \rangle \iff \Gamma \subseteq \Pi.$
- $\mathbf{V}$ は変数全体の集合.
- $p^{I(\langle \Gamma; \Delta \rangle)}(x_1, \dots, x_n)$ が真 $\iff p(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma.$

- $x^{\text{id}} = x$.

Lemma 4.4 $\models$ をカノニカルモデルでの論理式の評価とする．このとき，任意の論理式 A , $\exists\forall$ -極大無矛盾な任意のペア $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ に対して，

$$\langle \Gamma; \Delta \rangle, \text{id} \models A \iff A \in \Gamma.$$

Proof A の構成に関する帰納法による． A が原子論理式の場合は定義から OK. A の一番外側の論理記号が $\wedge, \vee, \forall, \exists$ の場合は Lemma 4.1 (1)–(4) と帰納法の仮定から OK ($A \equiv \forall xB, \exists xB$ の場合に，次の同値性を用いる：

$$\langle \Gamma; \Delta \rangle, \text{id}[y/x] \models B \iff \langle \Gamma; \Delta \rangle, \text{id} \models B[y/x].$$

). 以下では $A \equiv B \rightarrow C$ の場合を示す． $A \equiv \neg B$ の場合も同様にすればよい．

[($\implies$) の対偶] $B \rightarrow C \notin \Gamma$ とする． $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ の極大性から $B \rightarrow C \in \Delta$ であり無矛盾性などから $\langle \Gamma, B; C \rangle$ は無矛盾である．さらに，Lemma 4.2, 3.10 から $\Gamma \cup \{B\}$ は ω -closed であるので，結局 $\langle \Gamma, B; C \rangle$ は ωfc であることが言える．そこで Lemma 3.6(2) によって， $\exists\forall$ -極大無矛盾なペア $\langle \Pi; \Sigma \rangle$ で

$$\Gamma \cup \{B\} \subseteq \Pi, \quad C \in \Sigma \text{ (したがって無矛盾性から } C \notin \Pi)$$

なるものの存在が言える．すると帰納法の仮定から

$$\langle \Pi; \Sigma \rangle, \text{id} \models B, \quad \langle \Pi; \Sigma \rangle, \text{id} \not\models C$$

となり，一方 $\langle \Gamma; \Delta \rangle \leq \langle \Pi; \Sigma \rangle$ であるので， $\models$ の定義により

$$\langle \Gamma; \Delta \rangle, \text{id} \not\models B \rightarrow C$$

となる．

[($\impliedby$) の対偶] $\langle \Gamma; \Delta \rangle, \text{id} \not\models B \rightarrow C$ とする．すなわち，ある $\exists\forall$ -極大無矛盾な $\langle \Pi; \Sigma \rangle \geq \langle \Gamma; \Delta \rangle$ に対して

$$\langle \Pi; \Sigma \rangle, \text{id} \models B, \quad \langle \Pi; \Sigma \rangle, \text{id} \not\models C$$

となっている．すると帰納法の仮定から

$$B \in \Pi, \quad C \notin \Pi$$

となり，Lemma 4.1(5) から $B \rightarrow C \notin \Pi$ となる．したがって $B \rightarrow C \notin \Gamma$. ■

完全性定理 2.1 の証明

対偶を示す． $\not\models A$ と仮定する．すると $\langle ; A \rangle$ は無矛盾であり，Lemma 3.6(1) により $A \in \Delta$ なる $\exists\forall$ -極大無矛盾ペア $\langle \Gamma; \Delta \rangle$ が存在する．するとこの無矛盾性から $A \notin \Gamma$ であり，Lemma 4.4 によりカノニカルモデルにおいて $\langle \Gamma; \Delta \rangle, \text{id} \not\models A$. ■

参考文献

- [1] Dov M. Gabbay, **Semantical Investigations in Heyting's Intuitionistic Logic**, (D. Reidel, 1981).
- [2] Sabine Görnemann, *A logic stronger than intuitionism*, **Journal of Symbolic Logic** **36**, 249-261, (1971).
- [3] 鹿島 亮, 非古典論理シーケント計算 — 完全性定理のシーケント計算による証明, **日本数学会 数学基礎論分科会 1999 年度年会 特別講演** (アブストラクト集 49-67).
- [4] 小野寛晰, (1976 年 セミナー資料).
- [5] Richmond H. Thomason, *A semantical study of constructible falsity*, **Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik** **15**, 247-257 (1969).