チュートリアル：様相論理入門

鹿島 亮（東京工業大学情報理工学研究科）

数学基礎論サマースクール
2003 年 9 月

数理論理学における非古典論理の最も基本的な取り扱いを，様相命題論理を例にして説明する．具体的には，様相命題論理 **K**，**S4**，**S5**，**GL** のヒルベルト流体系，シークエント計算，クリプキモデル，健全性，完全性，有限モデル性，決定可能性，カット除去など．さらに，様相 μ 計算（様相命題論理 **K** に不動点演算子を付け加えた体系）についても説明する．なお，１〜３節のほとんどの内容は多くの教科書（たとえば [1]）に載っている．４節の様相 μ 計算については，たとえば [2] に詳しい解説がある．

1　古典命題論理

1.1　論理式

$\equiv$ は「記号列として等しい」ことを表す．

古典命題論理の論理式は以下の記号から作られる．

1. **命題変数**．可算無限ある．命題変数の全体を **PropVar** とする．
2. **論理結合子**: $\wedge$，$\vee$，$\to$，$\neg$.

論理式は以下で再帰的に定義される．

1. 命題変数は論理式である．
2. A，B が論理式ならば次の四つ：$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\to B)$，$(\neg A)$ もそれぞれ論理式である．

$A\leftrightarrow B$ を $((A\to B)\wedge(B\to A))$ の省略形として用いる．

論理式 A 中の命題変数 p の出現をすべて論理式 B に置き換えた論理式を $A[B/p]$ と表記する．

p, q, r 等で命題変数を，A, B, C 等で論理式を，Γ, Δ 等で論理式の集合を表す．$\neg > \wedge > \vee > \to$ という優先順位をつけて括弧を省略する．例：$\neg A\vee B\wedge C\to D \equiv \Big(\big((\neg A)\vee(B\wedge C)\big)\to D\Big)$.

論理式 A 中に部分記号列として出現する論理式を A の <u>部分論理式</u> または <u>部分式</u> と呼ぶ．正確には，A に対してその部分論理式全体の集合 $\mathsf{Sub}(A)$ は次のように再帰的に定義される．

1. $\mathsf{Sub}(p) = \{p\}$.
2. $\mathsf{Sub}(\neg A) = \{\neg A\}\cup\mathsf{Sub}(A)$. $\mathsf{Sub}(A\star B) = \{A\star B\}\cup\mathsf{Sub}(A)\cup\mathsf{Sub}(B)$ （ただし $\star\in\{\wedge,\vee,\to\}$）.

「論理式 A における命題変数 p の出現はすべて positive （偶数個の $\neg$ の内側）である」ということを $p \overset{+}{\prec} A$ と書き,「A における p の出現はすべて negative （奇数個の $\neg$ の内側）である」ということを $p \overset{-}{\prec} A$ と書く（ただし $\to$ の左辺は $\neg$ の内側と見なす）．これらは正確には次のように再帰的に定義される．

$p \overset{+}{\prec} p$. $p \overset{+}{\prec} q$. $p \overset{-}{\prec} q$（ただし $p \not\equiv q$）.

$p \overset{+}{\prec} A \star B \iff (p \overset{+}{\prec} A$ かつ $p \overset{+}{\prec} B)$（ただし $\star \in \{\wedge, \vee\}$）.
$p \overset{-}{\prec} A \star B \iff (p \overset{-}{\prec} A$ かつ $p \overset{-}{\prec} B)$（ただし $\star \in \{\wedge, \vee\}$）.

$p \overset{+}{\prec} A \to B \iff (p \overset{-}{\prec} A$ かつ $p \overset{+}{\prec} B)$.
$p \overset{-}{\prec} A \to B \iff (p \overset{+}{\prec} A$ かつ $p \overset{-}{\prec} B)$.

$p \overset{+}{\prec} \neg A \iff p \overset{-}{\prec} A$.
$p \overset{-}{\prec} \neg A \iff p \overset{+}{\prec} A$.

ある命題変数 p に対して，$p \to p$ を $\top$ と，$\neg(p \to p)$ を $\bot$ と表記する．論理式の有限集合 $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ に対して

$$\bigwedge \Gamma \equiv \top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n, \qquad \bigvee \Gamma \equiv \bot \vee A_1 \vee \cdots \vee A_n$$

とする（$\top, \bot$ は $n = 0$ の時にもこれらが定義される目的で入れてある）.

1.2 解釈

各命題変数に真理値 True か False を割り当てる方法を 解釈 と呼ぶ．すなわち，解釈は **PropVar** から $\{\mathsf{True}, \mathsf{False}\}$ への関数であり，解釈 $\mathcal{M}$ による命題変数 p の真理値を $\mathcal{M}(p)$ と書く.

解釈 $\mathcal{M}$ は，次の方法で「論理式全体から $\{\mathsf{True}, \mathsf{False}\}$ への関数」に一意に拡張される.

$\mathcal{M}(A \wedge B) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(A) = \mathsf{True}$ かつ $\mathcal{M}(B) = \mathsf{True}$.
$\mathcal{M}(A \vee B) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(A) = \mathsf{True}$ または $\mathcal{M}(B) = \mathsf{True}$.
$\mathcal{M}(A \to B) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(A) = \mathsf{False}$ または $\mathcal{M}(B) = \mathsf{True}$.
$\mathcal{M}(\neg A) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(A) = \mathsf{False}$.

「任意の解釈 $\mathcal{M}$ について $\mathcal{M}(A) = \mathsf{True}$」が成り立つとき，$A$ は トートロジー（または 恒真式）と呼ばれる．例：$A \to A$，$A \vee \neg A$，$((A \to B) \to A) \to A$．トートロジーは「内容によらず形だけから正しいといえる文」と考えてよい.

1.3 ヒルベルト流体系

以下の公理と推論規則で論理式を証明する体系を $\mathbf{C_H}$ と呼ぶ.

公理：次の形をした論理式すべて
$A \to A$，$A \to (B \to A)$，$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$，$A \to (B \to (A \wedge B))$，$(A \wedge B) \to A$，
$(A \wedge B) \to B$，$A \to (A \vee B)$，$B \to (A \vee B)$，$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$，
$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$，$\neg\neg A \to A$，$A \vee \neg A$.

推論規則: $\dfrac{A \to B \quad A}{B}$ (modus ponens)

このように,「各論理結合子の性質を表した多くの公理と，modus ponens を含む少しの規則を持ち，論理式を単位として推論が進んでいく体系」のことを，一般にヒルベルト流体系と呼ぶ（$\mathbf{C_H}$の H は Hilbert を表す）．ヒルベルト流体系 $\mathcal{X}$ で論理式 A が証明できることを

$$\mathcal{X} \vdash A$$

と書く．なお，上の先頭と末尾の二つの公理 $A\to A$，$A\vee\neg A$ は共に他の公理だけから導くことができるので，なくてもよい．

定理 1（$\mathbf{C}_\mathrm{H}$の健全性）

$\mathbf{C}_\mathrm{H}\vdash A$ ならば A はトートロジーである．

(証明)　$\mathbf{C}_\mathrm{H}\vdash A$ の証明図に関する帰納法による．すなわち，$\mathbf{C}_\mathrm{H}$の公理がすべてトートロジーであること，規則 (modus ponens) の前提が共にトートロジーである場合は結論もトートロジーになること，を示せばよい．　**(証明終)**

$\mathbf{C}_\mathrm{H}$で何かが証明できることを示すための非常に有用な結果を紹介する．$\mathbf{C}_\mathrm{H}$に論理式 $A_1,\ldots,A_n$ を公理として加えた体系で B が証明できることを

$$\mathbf{C}_\mathrm{H}+A_1+\cdots+A_n\vdash B$$

と書く．

注意：$\mathbf{C}_\mathrm{H}$の公理は「その形をしたすべての論理式」であるが，ここで $\mathbf{C}_\mathrm{H}+A_1+\cdots+A_n$ と書いたら追加分は n 個の論理式 $A_1,\ldots,A_n$ そのものだけである．

定理 2（演繹定理）

$\mathbf{C}_\mathrm{H}+A_1+\cdots+A_n\vdash B$ （ただし $n\geq 1$）ならば $\mathbf{C}_\mathrm{H}+A_1+\cdots+A_{n-1}\vdash A_n\to B$.

(証明)　$\mathbf{C}_\mathrm{H}+A_1+\cdots+A_n\vdash B$ の証明の構成に関する帰納法による．

- B が $\mathbf{C}_\mathrm{H}$ の公理または $A_1,\ldots,A_{n-1}$ のどれかのとき．

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{C}_\mathrm{H}\text{の公理}}{B\to(A_n\to B)}\qquad\dfrac{\mathbf{C}_\mathrm{H}+A_1+\ldots+A_{n-1}\text{ の公理}}{B}}{A_n\to B}$$

- $B\equiv A_n$ のとき．$(A_n\to B)\equiv(B\to B)$ であり，これは $\mathbf{C}_\mathrm{H}$ の公理になるので証明できる．

- B が $C\to B$ と C から modus ponens で得られたとき．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{C}_\mathrm{H}\text{の公理}}{(A_n\to(C\to B))\to((A_n\to C)\to(A_n\to B))}\qquad\dfrac{\text{帰納法の仮定}}{A_n\to(C\to B)}}{(A_n\to C)\to(A_n\to B)}\qquad\dfrac{\text{帰納法の仮定}}{A_n\to C}}{A_n\to B}$$

(証明終)

定理 3（演繹定理の使用例）

(1)　$\mathbf{C}_\mathrm{H}\vdash\neg A\to(A\to B)$.

(2)　$\mathbf{C}_\mathrm{H}+A_1+\cdots+A_n+B\vdash C$ かつ $\mathbf{C}_\mathrm{H}+A_1+\cdots A_n+\neg B\vdash C$ ならば，$\mathbf{C}_\mathrm{H}+A_1+\cdots+A_n\vdash C$.

(証明)　**(1)**　$\mathbf{C}_\mathrm{H}+\neg A+A\vdash B$ を示して，演繹定理を 2 回適用すればよい．

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{C}_\mathrm{H}\text{の公理}}{\neg\neg B\to B}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{C}_\mathrm{H}\text{の公理}}{(\neg B\to A)\to((\neg B\to\neg A)\to\neg\neg B)}\qquad\dfrac{\dfrac{\mathbf{C}_\mathrm{H}\text{の公理}}{A\to(\neg B\to A)}\quad A}{\neg B\to A}}{(\neg B\to\neg A)\to\neg\neg B}\qquad\dfrac{\dfrac{\mathbf{C}_\mathrm{H}\text{の公理}}{\neg A\to(\neg B\to\neg A)}\quad\neg A}{\neg B\to\neg A}}{\neg\neg B}}{B}$$

(2) 仮定と演繹定理により $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} + A_1 + \cdots + A_n \vdash B \to C$ かつ $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} + A_1 + \cdots + A_n \vdash \neg B \to C$．ところで，公理により $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash B \vee \neg B$，および $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash (B \to C) \to ((\neg B \to C) \to ((B \vee \neg B) \to C))$．したがって modus ponens を 3 回使って $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} + A_1 + \cdots + A_n \vdash C$ を得る． **(証明終)**

定理 4

(1) $p \overset{+}{\prec} F$ ならば $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash (X \to Y) \to (F[X/p] \to F[Y/p])$.

(2) $p \overset{-}{\prec} F$ ならば $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash (X \to Y) \to (F[Y/p] \to F[X/p])$.

(3) $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash (X \leftrightarrow Y) \to (F[X/p] \leftrightarrow F[Y/p])$.

(証明) (1)(2) は同時に F の構成に関する帰納法で証明する．たとえば $F \equiv A \to B$ で $p \overset{+}{\prec} F$ の場合を示す．$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} + X \to Y + (A \to B)[X/p] + A[Y/p] \vdash B[Y/p]$ を示せば，演繹定理を 3 回適用して求めるものが得られる．

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{帰納法の仮定}
\UnaryInfC{$(X\to Y)\to(B[X/p]\to B[Y/p])$}
\AxiomC{$X\to Y$}
\BinaryInfC{$B[X/p]\to B[Y/p]$}
\AxiomC{$(A\to B)[X/p]$}
\AxiomC{帰納法の仮定}
\UnaryInfC{$(X\to Y)\to(A[Y/p]\to A[X/p])$}
\AxiomC{$X\to Y$}
\BinaryInfC{$A[Y/p]\to A[X/p]$}
\AxiomC{$A[Y/p]$}
\BinaryInfC{$A[X/p]$}
\BinaryInfC{$B[X/p]$}
\BinaryInfC{$B[Y/p]$}
\end{prooftree}
$$

(証明終)

問題 5

次を示せ．$\{A_1, \ldots, A_m\} = \{B_1, \ldots, B_n\}$ であり，$A^{\wedge}$ は $A_1, \ldots, A_m$ すべてを勝手な順番で $\wedge$ でつないだ論理式，$A^{\vee}$ は $A_1, \ldots, A_m$ すべてを勝手な順番で $\vee$ でつないだ論理式，$B^{\wedge}$ は $B_1, \ldots, B_n$ すべてを勝手な順番で $\wedge$ でつないだ論理式，$B^{\vee}$ は $B_1, \ldots, B_n$ すべてを勝手な順番で $\vee$ でつないだ論理式とする．(たとえば $m = 4$ で $A^{\wedge} \equiv (A_1 \wedge (A_3 \wedge A_2)) \wedge A_4$.）すると，$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash A^{\wedge} \leftrightarrow B^{\wedge}$．$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash A^{\vee} \leftrightarrow B^{\vee}$.

1.4 シークエント計算

Γ, Δ が論理式の有限集合のとき

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

という表記を シークエント と呼ぶ．**LK** は，以下の公理と推論規則でシークエントを証明する体系である．

公理: $A \Rightarrow A$

推論規則:

$$\dfrac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge\text{左}) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Pi \Rightarrow \Sigma, B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, A \wedge B}\ (\wedge\text{右})$$

$$\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \vee B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (\vee\text{左}) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\ (\vee\text{右})$$

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \to B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (\to\text{左}) \qquad \dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\ (\to\text{右})$$

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\neg\text{左}) \qquad \dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ (\neg\text{右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{weakening 左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (\text{weakening 右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (\text{cut})$$

ただし，たとえば「Γ, A」は「$\Gamma \cup \{A\}$」のことであり,「Γ, Δ」は「$\Gamma \cup \Delta$」のことである．このように,「少しの公理と,『シークエントの左辺，右辺に各結合子を導入する規則』を含む多くの規則を持ち，シークエントを単位として推論が進んでいく体系」のことを，一般にシークエント計算と呼ぶ．シークエント計算 $\mathcal{X}$ でシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明できることを

$$\mathcal{X} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$$

と書く．

定理 6（$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$と LK の同等性）

$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash F \iff \mathbf{LK} \vdash \Rightarrow F.$

(証明) $(\Longrightarrow)$　$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$における F の証明図に関する帰納法による．具体的には，$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$の各公理 A に対して $\mathbf{LK} \vdash \Rightarrow A$ であることと,「$\mathbf{LK} \vdash \Rightarrow A{\to}B$ かつ $\mathbf{LK} \vdash \Rightarrow A$ ならば $\mathbf{LK} \vdash \Rightarrow B$」を示せばよい．後者は次で示される．

$$\dfrac{\Rightarrow A{\to}B \qquad \dfrac{\Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A{\to}B \Rightarrow B}\,(\to\text{左})}{\Rightarrow B}\,(\text{cut})$$

$(\Longleftarrow)$　次の (†) を，**LK** における $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明図に関する帰納法で示す．

(†) $\mathbf{LK} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash (\bigwedge \Gamma){\to}(\bigvee \Delta)$

ここで，$\bigwedge \Gamma$ 等の表現の曖昧性（$\wedge$ でつなぐ順番や重複などに複数の可能性がある）は無視してよいことが問題 5 と定理 4(3) などから言えるので，問題にしない．すると (†) と

(ア) $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash (\bigwedge\{\}{\to}\bigvee\{A\}){\to}A$

から求める定理は証明される．(†) を示すためには，**LK** の公理／規則に対応して次のようなことを示せばよい．

(イ) $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash (\top{\wedge}A){\to}(\bot{\vee}A)$ （公理に対応）．

(ウ) $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash \Big(C{\to}(D{\vee}A)\Big){\wedge}\Big((B{\wedge}P){\to}S\Big){\to}\Big(((A{\to}B){\wedge}C{\wedge}P){\to}(D{\vee}S)\Big)$ （$(\to$左$)$ 規則に対応）．

(エ) $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash \Big((A{\wedge}C){\to}(D{\vee}B)\Big){\to}\Big(C{\to}(D{\vee}(A{\to}B))\Big)$ （$(\to$右$)$ 規則に対応）．

(他) 各規則に対応するものすべて．

（ア）〜（エ）やその他は，演繹定理などを使って示すことができる．たとえば（エ）は，

(オ) $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} + (A{\wedge}C){\to}(D{\vee}B) + C + A \vdash D{\vee}(A{\to}B)$

(カ) $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} + (A{\wedge}C){\to}(D{\vee}B) + C + \neg A \vdash D{\vee}(A{\to}B)$

から演繹定理と定理 3(2) で示すことができる．そしてこれらは次のように証明できる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{定理 }4(1)}{\Big(B{\to}(A{\to}B)\Big){\to}\Big((D{\vee}B){\to}(D{\vee}(A{\to}B))\Big)} \qquad \dfrac{\mathbf{C}_{\mathrm{H}}\text{の公理}}{B{\to}(A{\to}B)}}{(D{\vee}B){\to}(D{\vee}(A{\to}B))} \qquad \dfrac{(A{\wedge}C){\to}(D{\vee}B) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{C}_{\mathrm{H}}\text{の公理}}{A{\to}(C{\to}(A{\wedge}C))} \quad A}{C{\to}(A{\wedge}C)} \quad C}{A{\wedge}C}}{D{\vee}B}}{D{\vee}(A{\to}B)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{C}_{\mathrm{H}}\text{の公理}}{(A{\to}B){\to}(D{\vee}(A{\to}B))} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{定理 3(1)}}{\neg A{\to}(A{\to}B)} \quad \neg A}{A{\to}B}}{D{\vee}(A{\to}B)}$$

(証明終)

1.5 完全性

φ が論理式の有限集合で $\Gamma\cup\Delta=\varphi$ であるとき，シークエント $\Gamma\Rightarrow\Delta$ は φ 極大 であると言う．

シークエント $\Gamma\Rightarrow\Delta$ が任意の A，B に対して以下のすべての条件を満たすとき，これを 飽和シークエント と呼ぶ．

(∧ 左条件)　$A{\wedge}B\in\Gamma$ ならば $A\in\Gamma$ かつ $B\in\Gamma$.
(∧ 右条件)　$A{\wedge}B\in\Delta$ ならば $A\in\Delta$ または $B\in\Delta$.
(∨ 左条件)　$A{\vee}B\in\Gamma$ ならば $A\in\Gamma$ または $B\in\Gamma$.
(∨ 右条件)　$A{\vee}B\in\Delta$ ならば $A\in\Delta$ かつ $B\in\Delta$.
(→ 左条件)　$A{\to}B\in\Gamma$ ならば $A\in\Delta$ または $B\in\Gamma$.
(→ 右条件)　$A{\to}B\in\Delta$ ならば $A\in\Gamma$ かつ $B\in\Delta$.
(¬ 左条件)　$\neg A\in\Gamma$ ならば $A\in\Delta$.
(¬ 右条件)　$\neg A\in\Delta$ ならば $A\in\Gamma$.

補題 7

$\mathcal{X}$ を **LK** に規則や公理を 0 個以上追加したシークエント計算とし，F を任意の論理式とする．$\mathsf{Sub}(F)$ 極大かつ $\mathcal{X}$ で証明不可能なシークエントは飽和シークエントである．

(証明)　$\Gamma\cup\Delta=\mathsf{Sub}(F)$，$\mathcal{X}\nvdash\Gamma\Rightarrow\Delta$ を仮定して，飽和の条件を示す．

(∧ 左条件)　$A{\wedge}B\in\Gamma$ ならば $A\in\Gamma$ であることを示す（$B\in\Gamma$ も同様）．$A{\wedge}B\in\Gamma$ かつ $A\notin\Gamma$ と仮定すると，$\mathsf{Sub}(F)$ 極大性から $A\in\Delta$ となる（$A\in\mathsf{Sub}(F)$ なので）．しかし，$\mathcal{X}\vdash A{\wedge}B\Rightarrow A$ なので，weakening 規則により $\mathcal{X}\vdash\Gamma\Rightarrow\Delta$ となってしまう．

(∧ 右条件)　$A{\wedge}B\in\Delta$ かつ $A\notin\Delta$ かつ $B\notin\Delta$ を仮定すると，$\mathsf{Sub}(F)$ 極大性から $A,B\in\Gamma$ となる（$A,B\in\mathsf{Sub}(F)$ なので）．しかし $\mathcal{X}\vdash A,B\Rightarrow A{\wedge}B$ なので，weakening 規則により $\mathcal{X}\vdash\Gamma\Rightarrow\Delta$ となってしまう．

他も同様．　**(証明終)**

補題 8

$\mathcal{X}$ を規則 cut を持つシークエント計算，φ を論理式の有限集合とする．$\Gamma\cup\Delta\subseteq\varphi$ かつ $\mathcal{X}\nvdash\Gamma\Rightarrow\Delta$ ならば，$\Gamma\subseteq\Gamma^+$，$\Delta\subseteq\Delta^+$，$\mathcal{X}\nvdash\Gamma^+\Rightarrow\Delta^+$ なる φ 極大なシークエント $\Gamma^+\Rightarrow\Delta^+$ が存在する．

(証明)　$\varphi=\{F_1,F_2,\ldots,F_n\}$ として，シークエントの列 $\Gamma_i\Rightarrow\Delta_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$ を以下で定義する．

$$\Gamma_0\Rightarrow\Delta_0 \quad\equiv\quad \Gamma\Rightarrow\Delta$$

$$\Gamma_k\Rightarrow\Delta_k \quad\equiv\quad \begin{cases} F_k,\Gamma_{k-1}\Rightarrow\Delta_{k-1} & (\mathcal{X}\nvdash F_k,\Gamma_{k-1}\Rightarrow\Delta_{k-1}\text{ のとき}) \\ \Gamma_{k-1}\Rightarrow\Delta_{k-1},F_k & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

すると，$i = 0, 1, \ldots n$ に対して $\mathcal{X} \nvdash \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ である．このことは，cut 規則の適用：

$$\frac{\Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}, F_k \quad F_k, \Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}}{\Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}}$$

と $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ の定義から（i に関する帰納法で）言える．そこで $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ が求める $\Gamma^+ \Rightarrow \Delta^+$ になる．
(証明終)

定理 9（LK の完全性）

$\mathbf{LK} \nvdash \Rightarrow F$ ならば F はトートロジーでない．

(証明) $\mathbf{LK} \nvdash \Rightarrow F$ とする．このとき補題 7，8 により，$F \in \Delta$ であり **LK** で証明不可能な（$\mathsf{Sub}(F)$ 極大な）飽和シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が存在する．そこで解釈 $\mathcal{M}$ を

$\mathcal{M}(p) = \mathsf{True} \quad \Longleftrightarrow \quad p \in \Gamma$

で定義すると，任意の論理式 X に対して

$X \in \Gamma$ ならば $\mathcal{M}(X) = \mathsf{True}$,
$X \in \Delta$ ならば $\mathcal{M}(X) = \mathsf{False}$,

が成り立つ．これは X の構成に関する帰納法で次のように示される．

- $X \equiv p$ で $X \in \Gamma$ のとき．$\mathcal{M}(p)$ の定義から $\mathcal{M}(p) = \mathsf{True}$.
- $X \equiv p$ で $X \in \Delta$ のとき．$p \in \Gamma$ と仮定すると，$\mathbf{LK} \vdash p \Rightarrow p$ であることから weakening 規則により $\mathbf{LK} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ となってしまう．したがって $p \notin \Gamma$ であり，$\mathcal{M}(p)$ の定義から $\mathcal{M}(p) = \mathsf{False}$.
- $X \equiv A \wedge B$ で $X \in \Gamma$ のとき．飽和性（$\wedge$ 左条件）から $A \in \Gamma$ かつ $B \in \Gamma$ であり，帰納法の仮定から $\mathcal{M}(A) = \mathsf{True}$ かつ $\mathcal{M}(B) = \mathsf{True}$．したがって $\mathcal{M}(A \wedge B) = \mathsf{True}$.
- 他の場合も同様.

ところで $F \in \Delta$ なので，これから $\mathcal{M}(F) = \mathsf{False}$ であり，F はトートロジーではない． **(証明終)**

定理 10（古典命題論理の完全性，健全性）

次の三条件は同値である．(1) $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash A$．(2) $\mathbf{LK} \vdash \Rightarrow A$．(3) A はトートロジーである．

(証明) 定理 1，6，9 による． **(証明終)**

一般に，シークエント計算 $\mathcal{X}$ に対する次の主張を「$\mathcal{X}$ のカット除去定理」と呼ぶ．

$\mathcal{X} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば $\mathcal{X}$ において規則 cut を使用しないで $\Gamma \Rightarrow \Delta$ を証明することができる
（すなわち，$\mathcal{X}$ から規則 cut を取り除いても証明できるシークエントは減らない）．

この定理を示す方法のひとつは，次のような手続きを与えることである：$\mathcal{X}$ の任意の証明図から出発して，証明図を次々に変形していき，最終的には cut を含まず結論は最初の証明図と変わらない証明図に至る（この手続きの存在までを含めて「カット除去定理」と呼ぶこともある）．大抵のシークエント計算では，cut 以外のすべての規則は「規則の前提は規則の結論よりも何らかの意味で簡単な形をしている」という性質を持つ．したがって cut を使わない証明図は，結論から前提へとさかのぼっていく分析が容易である．そして,「cut 無しの証明図だけを考慮すればよい」という事実を保証するカット除去定理は，その論理の性質（何かが証明できないことを示す，体系間の関係，決定手続き，補間定理，他）を調べる強力な道具となる．

問題 11（カット除去定理の意味論的証明）

LK から規則 cut を削除した体系を $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}}$ と呼ぶ．
(1) 次を証明せよ：$\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}} \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば，$\Gamma \subseteq \Gamma^+$，$\Delta \subseteq \Delta^+$，$\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}} \nvdash \Gamma^+ \Rightarrow \Delta^+$ なる飽和シークエント $\Gamma^+ \Rightarrow \Delta^+$ が存在する．
(2) (1)，定理 9 の **LK** を $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}}$ に替えたもの，および定理 10 などにより，**LK** のカット除去定理（または「$\mathbf{LK} \vdash \Rightarrow F$ ならば $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}} \vdash \Rightarrow F$」でもよい）を証明せよ．

---

2 様相命題論理 K

2.1 論理式

様相命題論理の論理式は，1.1 節の「記号」に

3. **様相記号**: $\Box$

を加え,「論理式の定義」に

3. A が論理式ならば $(\Box A)$ も論理式である

を加えることで定義される．

$\Box$ は $\neg$ と同様に優先順位が高いものとして括弧を省略する．たとえば，$\Box\, p \wedge q \equiv ((\Box\, p) \wedge q)$.

$\Box A$ という形の論理式を <u>□論理式</u> と呼ぶ．

$\Diamond A$ を $\neg\Box\neg A$ の省略形として用いる．

様相命題論理式 A に対して，その部分論理式全体の集合 $\mathsf{Sub}(A)$ は，1.1 節の再帰的定義に次を追加することで得られる．

$$\mathsf{Sub}(\Box A) = \{\Box A\} \cup \mathsf{Sub}(A).$$

$p \overset{+}{\prec} A$，$p \overset{-}{\prec} A$ （論理式 A における命題変数 p の出現はすべて positive ／ negative である）という概念は，1.1 節の再帰的定義に次を追加することで得られる．

$$p \overset{+}{\prec} \Box A \iff p \overset{+}{\prec} A.$$
$$p \overset{-}{\prec} \Box A \iff p \overset{-}{\prec} A.$$

様相命題論理式 A がトートロジーであるということを,「A 中の□論理式を命題変数と見なしたときにトートロジーになること」で定義する．正確には，次の条件を満たす $B, C_1, \ldots, C_k, p_1, \ldots, p_k$ が存在するとき A はトートロジーであると言う．

- B は $\Box$ を含まない命題論理式で，1.2 節の意味でトートロジーである．
- $p_1, \ldots, p_k$ は相異なる命題変数で，$A \equiv B[\vec{C}/\vec{p}]$.（ただし，$[\vec{C}/\vec{p}]$ は $p_1, \ldots, p_k$ にそれぞれ論理式 $C_1 \ldots, C_k$ を同時代入することを表す）

例：$\Box p \vee \neg\Box p$ はトートロジーであり，$\Box(p \vee \neg p)$ や $\Box(p \wedge q) \vee \neg\Box(q \wedge p)$ はトートロジーでない．

A がトートロジーであることを

$$\models_{\mathrm{taut}} A$$

と書き，また $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \cdots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \cdots)$ がトートロジーであることを

$$A_1, \ldots, A_n \models_{\mathrm{taut}} B$$

とも書く．

2.2　クリプキフレーム，クリプキモデル

空でない集合 W と，W 上の２項関係 $\rightsquigarrow$ の組 $\langle W, \rightsquigarrow \rangle$ を クリプキフレーム，または単に フレーム と呼ぶ．W が有限集合のときは特に 有限フレーム とも言う．W をこのフレームの 可能世界集合（W の各要素を 可能世界），$\rightsquigarrow$ を 到達可能関係 と呼ぶ．

フレーム $\mathcal{F} = \langle W, \rightsquigarrow \rangle$ に対して，写像

$$V : W \times \mathbf{PropVar} \rightarrow \{\mathsf{True}, \mathsf{False}\}$$

を $\mathcal{F}$ 上の 付値 と呼び，フレームと付値の組 $\langle \langle W, \rightsquigarrow \rangle, V \rangle$ を クリプキモデル と呼ぶ．$\mathcal{F}$ が有限フレームのときは特に 有限クリプキモデル とも呼ぶ．

クリプキモデル $\mathcal{M} = \langle \langle W, \rightsquigarrow \rangle, V \rangle$ において，「可能世界 $w \in W$ における論理式 X の真理値（True か False）」を $\mathcal{M}(w, X)$ と書く．これは次のように X の構成に関して再帰的に定義される．

$\mathcal{M}(w, p) = V(w, p)$.
$\mathcal{M}(w, A \wedge B) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(w, A) = \mathsf{True}$ かつ $\mathcal{M}(w, B) = \mathsf{True}$.
$\mathcal{M}(w, A \vee B) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(w, A) = \mathsf{True}$ または $\mathcal{M}(w, B) = \mathsf{True}$.
$\mathcal{M}(w, A \rightarrow B) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(w, A) = \mathsf{False}$ または $\mathcal{M}(w, B) = \mathsf{True}$.
$\mathcal{M}(w, \neg A) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(w, A) = \mathsf{False}$.
$\mathcal{M}(w, \Box A) = \mathsf{True} \iff w \rightsquigarrow x$ となるすべての $x \in W$ に対して $\mathcal{M}(x, A) = \mathsf{True}$.

問題 12

(1)　$\mathcal{M} = \langle \langle W, \rightsquigarrow \rangle, V \rangle$ において次が成り立つことを示せ：
$\mathcal{M}(w, \Diamond A) = \mathsf{True} \iff w \rightsquigarrow x$ かつ $M(x, A) = \mathsf{True}$ となる $x \in W$ が存在する．
(2)　様相命題論理式 A がトートロジーならば，どんなクリプキモデル $\mathcal{M} = \langle \langle W, \rightsquigarrow \rangle, V \rangle$ のどんな可能世界 $w \in W$ においても $\mathcal{M}(w, A) = \mathsf{True}$ となることを示せ．

A を論理式，$\mathcal{F} = \langle W, \rightsquigarrow \rangle$ をフレームとする．「フレーム $\mathcal{F}$ に任意の付値 V を付けたクリプキモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ の任意の可能世界 $w \in W$ で $\mathcal{M}(w, A) = \mathsf{True}$」となるとき，「$A$ はフレーム $\mathcal{F}$ で恒真」と言い

$$\mathcal{F} \models A$$

と書く．X がフレームのある集まりのとき，「すべての $\mathcal{F} \in \mathsf{X}$ に対して $\mathcal{F} \models A$」であることを「A はフレームのクラス X で恒真」と言い

$$\mathsf{X} \models A$$

と書く．

2.3　ヒルベルト流体系

1.3 節の $\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$ に次の公理と規則を加えた体系を $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$ と呼ぶ．

公理：　$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.

規則：　$\dfrac{A}{\Box A}$ (necessitation)

（1.3 節での論理式は□を含まなかったが，もちろんここで「$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$の公理と規則」と言ったら，その形に当てはまるすべての様相命題論理式を指す.）

すべてのフレームの集まりを K と書く.

定理 13（$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$の健全性）

$\mathbf{K}_{\mathrm{H}} \vdash A$ ならば $\mathsf{K} \models A$.

(証明)　$\mathbf{K}_{\mathrm{H}} \vdash A$ の証明に関する帰納法による.　**(証明終)**

定理 14

(1)　$\models_{\mathrm{taut}} A$ ならば $\mathbf{K}_{\mathrm{H}} \vdash A$.

(2)　$A_1, \ldots, A_n \models_{\mathrm{taut}} B$ ならば $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$において $A_1 \ldots, A_n$ から B を導くことができる.

(証明)　**(1)**　A がトートロジーならば次を満たす $B, C_1, \ldots, C_k, p_1, \ldots, p_k$ が存在する.

- B は □ を含まない命題論理式で，1.2 節の意味でトートロジーである.
- $p_1, \ldots, p_k$ は相異なる命題変数で，$A \equiv B[\vec{C}/\vec{p}]$.

ところで,

$$\mathbf{K}_{\mathrm{H}} \vdash F \text{ ならば } \mathbf{K}_{\mathrm{H}} \vdash F[\vec{C}/\vec{p}]$$

が $\mathbf{K}_{\mathrm{H}} \vdash F$ の証明図に関する帰納法で簡単に示されるので，これらと定理 10 から $\mathbf{K}_{\mathrm{H}} \vdash A$ は言える.
(2)　(1) と規則 modus ponens を使えばよい.　**(証明終)**

上記のことから，$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$および $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$を拡張した体系において次の規則が使用可能であることが言える.

$$\frac{A_1 \quad \cdots \quad A_n}{B}\ (\mathrm{taut})\ (A_1, \ldots, A_n \models_{\mathrm{taut}} B \text{ のとき})$$

以後，この規則も適宜使用する.

2.4　シークエント計算

1.4 節の **LK** に次の規則を加えた体系を $\mathbf{K}_{\mathrm{G}}$と呼ぶ（$\mathbf{K}_{\mathrm{G}}$の G は Gentzen を表す）.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\ (\Box)$$

ただし，$\Box\Gamma = \{\Box A \mid A \in \Gamma\}$ である.

定理 15（$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$と $\mathbf{K}_{\mathrm{G}}$の同等性）

$\mathbf{K}_{\mathrm{H}} \vdash F \iff \mathbf{K}_{\mathrm{G}} \vdash \Rightarrow F$.

(証明)
（$\Longrightarrow$）　$\mathbf{K}_{\mathrm{H}} \vdash F$ の証明図に関する帰納法による. $\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$の部分についてはすでに定理 6 でやっているので，$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$で新たに加わった部分についてだけやればよい. たとえば公理 $\Box(A{\to}B) \to (\Box A{\to}\Box B)$ に対しては次のように証明できる.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A{\to}B, A \Rightarrow B}\ (\to\text{左})}{\Box(A{\to}B), \Box A \Rightarrow \Box B}\ (\Box)}{\Rightarrow \Box(A{\to}B){\to}(\Box A{\to}\Box B)}\ (\to\text{右})$$

($\Longleftarrow$)　定理 6 の証明と同様に,「$\mathbf{K}_\mathrm{G} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば $\mathbf{K}_\mathrm{H} \vdash (\bigwedge \Gamma) \to (\bigvee \Delta)$」を，$\mathbf{K}_\mathrm{G}$における $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明図に関する帰納法で示せばよい．**LK** の部分についてはすでに定理 6 でやっているので，$\mathbf{K}_\mathrm{G}$で新たに加わった規則 ($\Box$) について次を示せばよい：

$\mathbf{K}_\mathrm{H}$において，$(\bigwedge \Gamma) \to (\bigvee \{A\})$ から $(\bigwedge \Box\Gamma) \to (\bigvee \{\Box A\})$ を導くことができる．

これは，たとえば $\Gamma \equiv \{B, C\}$ の場合次のように示される．

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\bigwedge\{B,C\})\to(\bigvee\{A\})$}
\RightLabel{(taut)}
\UnaryInfC{$B\to(C\to A)$}
\RightLabel{(nec)}
\UnaryInfC{$\Box(B\to(C\to A))$}
\AxiomC{$\mathbf{K}_\mathrm{H}$の公理}
\UnaryInfC{$\Box(B\to(C\to A))\to(\Box B\to\Box(C\to A))$}
\RightLabel{(taut)}
\BinaryInfC{$\Box B\to\Box(C\to A)$}
\AxiomC{$\mathbf{K}_\mathrm{H}$の公理}
\UnaryInfC{$\Box(C\to A)\to(\Box C\to\Box A)$}
\RightLabel{(taut)}
\BinaryInfC{$\Box B\to(\Box C\to\Box A)$}
\RightLabel{(taut)}
\UnaryInfC{$(\bigwedge\{\Box B,\Box C\})\to(\bigvee\{\Box A\})$}
\end{prooftree}
$$

(証明終)

2.5　完全性

論理式の集合 Γ に対して，論理式の集合 $\Gamma_\Box$ を

$$\Gamma_\Box = \{A \mid \Box A \in \Gamma\}$$

で定義する．

定理 16（$\mathbf{K}_\mathrm{G}$の完全性）

$\mathbf{K}_\mathrm{G} \nvdash\ \Rightarrow F$ ならば F を偽にする有限クリプキモデルが存在する，すなわち．ある有限クリプキモデル $\mathcal{M} = \langle\langle W, \rightsquigarrow\rangle, V\rangle$ とある可能世界 $w \in W$ に対して $\mathcal{M}(w, F) = \mathsf{False}$ となる．

(証明)　クリプキモデル $\mathcal{M} = \langle\langle W, \rightsquigarrow\rangle, V\rangle$ を次で定義する．

$W = \{\Gamma \Rightarrow \Delta \mid\ \mathbf{K}_\mathrm{G} \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ かつ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ は $\mathsf{Sub}(F)$ 極大 $\}$.

$(\Gamma \Rightarrow \Delta) \rightsquigarrow (\Pi \Rightarrow \Sigma) \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma_\Box \subseteq \Pi.$

$V((\Gamma \Rightarrow \Delta), p) = \mathsf{True} \quad \Longleftrightarrow \quad p \in \Gamma.$

$\mathsf{Sub}(F)$ は有限集合なので，これは有限クリプキモデルである．ここで，任意の論理式 X と W の任意の要素 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に対して，

$X \in \Gamma$ ならば $\mathcal{M}((\Gamma \Rightarrow \Delta), X) = \mathsf{True},$
$X \in \Delta$ ならば $\mathcal{M}((\Gamma \Rightarrow \Delta), X) = \mathsf{False},$　　(†)

が成り立つことを，X の構成に関する帰納法で示す．

- $X \equiv \Box A$ で $X \in \Gamma$ のとき．$(\Gamma \Rightarrow \Delta) \rightsquigarrow (\Pi \Rightarrow \Sigma)$ なる任意の $\Pi \Rightarrow \Sigma \in W$ において $\mathcal{M}((\Pi \Rightarrow \Sigma), A) = \mathsf{True}$ であることを示せばよいが，$\rightsquigarrow$ の定義から $A \in \Pi$ となるので，帰納法の仮定から明らか．
- $X \equiv \Box A$ で $X \in \Delta$ のとき．このとき，$\mathbf{K}_\mathrm{G} \nvdash \Gamma_\Box \Rightarrow A$ が成り立つ．なぜなら，このシークエントに規則 ($\Box$) と (weakening) を適用することによって $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が得られるから．すると，補題 8 によって，$\Gamma_\Box \subseteq \Pi$，$A \in \Sigma$ なる $(\Pi \Rightarrow \Sigma) \in W$ の存在が示され，帰納法の仮定により $\mathcal{M}((\Gamma \Rightarrow \Delta), \Box A) = \mathsf{False}$ が言える．
- 他の場合は定理 9 の証明と同様に補題 7 を使って示される（「$\mathsf{Sub}(F)$ 極大」の定義が 1 節と 2 節では異なっているが，補題 7 はそのまま成り立つことはすぐにわかる）．

ところで $\mathbf{K}_{\mathrm{G}} \nvdash \Rightarrow F$ なので，補題8によって，$F \in \Delta_0$ なる $(\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0) \in W$ の存在が示される．すると上の (†) によって $\mathcal{M}((\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0), F) = \mathsf{False}$ である． **(証明終)**

すべての有限フレームの集まりを $\mathsf{K}_{\mathrm{finite}}$ と書く．

定理 17（K の完全性，健全性，有限モデル性）

次の四条件は同値である．(1) $\mathbf{K}_{\mathrm{H}} \vdash A$．(2) $\mathbf{K}_{\mathrm{G}} \vdash \Rightarrow A$．(3) $\mathsf{K} \models A$．(4) $\mathsf{K}_{\mathrm{finite}} \models A$．

(証明) 定理 13，15，16 による． **(証明終)**

この様相論理を **K** と呼ぶ．すなわち，$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$ は **K** のヒルベルト流体系，$\mathbf{K}_{\mathrm{G}}$ は **K** のシークエント計算である．

「有限モデルのあるクラスに対して完全」な論理は <u>有限モデル性を持つ</u> と言う（たとえば上記のように，「$\mathbf{K} \vdash A \iff$ (4)」 なので **K** は有限モデル性を持つ）．一般に，論理 $\mathcal{X}$ の証明図全体が枚挙可能であり（すなわち，すべての証明図を機械的にもれなく生成することができ），さらに $\mathcal{X}$ が有限モデル性を持ち有限モデル全体も枚挙可能ならば，$\mathcal{X}$ は決定可能である（すなわち，与えられた論理式が $\mathcal{X}$ で証明可能か否かを決定するアルゴリズムがある）．これは，与えられた A に対して，A の証明図と A を偽にするモデルを並行して探していけるからである．

問題 18

(1) **K** の場合は，上記のような「与えられた A に対して，A の証明図と A を偽にするモデルを並行して探していく」方法ではなく，「A を偽にするモデルを有限個の候補の中で探す」という方法で A を偽にするモデルの有無を（すなわち A の証明可能性を）決定できる．この方法を説明せよ．
(2) $\mathbf{K}_{\mathrm{G}}$ではカット除去定理が成り立ち（これについては後で述べる），「cut 無しの証明図を探す」という方法で証明可能性を決定する方法もある．この方法を説明せよ．

3 様相命題論理 S4, S5, GL

3.1 S4, S5, GL のフレーム

次の形の論理式を考える．

(**T**) $\Box A \to A$

(**4**) $\Box A \to \Box\Box A$

(**5**) $\Diamond A \to \Box\Diamond A$

(**L**) $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$

T，**4**，**5** はこれらの論理式の伝統的な名前である．

フレーム $\mathcal{F} = \langle W, \rightsquigarrow \rangle$ に関する条件を定義する．

反射的：$\forall w \in W\ [w \rightsquigarrow w]$

推移的：$\forall w, x, y \in W\ [(w \rightsquigarrow x \text{ and } x \rightsquigarrow y) \Longrightarrow w \rightsquigarrow y]$

対称的：$\forall w, x \in W\ [w \rightsquigarrow x \Longrightarrow x \rightsquigarrow w]$

ユークリッド的：$\forall w, x, y \in W\ [(w \rightsquigarrow x \text{ and } w \rightsquigarrow y) \Longrightarrow x \rightsquigarrow y]$

無限遷移を持たない：$w_1 \rightsquigarrow w_2 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow w_n \rightsquigarrow \cdots$ となる可能世界の無限列は存在しない．

この最後の条件の「無限列」は，$i \neq j$ で $w_i = w_j$ となっても構わない．したがって，たとえば $w \rightsquigarrow w$ なる $w \in W$ があれば $\mathcal{F}$ は無限遷移を持つ．

定理 19

$\mathcal{F}$ を任意のフレームとする．

(1) $\mathcal{F}$ は反射的である $\iff \mathcal{F} \models \mathbf{T}$（すなわち，どんな論理式 A に対しても $\mathcal{F} \models \Box A \to A$）（以下同様）．

(2) $\mathcal{F}$ は推移的である $\iff \mathcal{F} \models \mathbf{4}$.

(3) $\mathcal{F}$ はユークリッド的である $\iff \mathcal{F} \models \mathbf{5}$.

(4) $\mathcal{F}$ は無限遷移を持たず，かつ推移的である $\iff \mathcal{F} \models \mathbf{L}$.

(証明) (4) だけ示す（他も難しくはない）．

(4 $\Longrightarrow$)：$\mathcal{F} = \langle W, \rightsquigarrow \rangle$ が推移的であるとして，ある A について $\mathcal{F} \not\models \Box(\Box A \to A) \to \Box A$ を仮定すると，$\mathcal{F}$ が無限遷移を持つことを示す．仮定から，$\mathcal{F}$ によるクリプキモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ と可能世界 $w \in W$ が存在して

(ア) $\mathcal{M}(w, \Box(\Box A \to A)) = \mathsf{True}$

(イ) $\mathcal{M}(w, \Box A) = \mathsf{False}$

となっている．(イ) から，$w \rightsquigarrow x_1$ なる $x_1 \in W$ が存在して $\mathcal{M}(x_1, A) = \mathsf{False}$ であり，これと (ア) から

(ウ) $\mathcal{M}(x_1, \Box A) = \mathsf{False}$

である．すると (ウ) から，$x_1 \rightsquigarrow x_2$ なる $x_2 \in W$ が存在して $\mathcal{M}(x_2, A) = \mathsf{False}$ であり，これと (ア) と $\rightsquigarrow$ の推移性から

(エ) $\mathcal{M}(x_2, \Box A) = \mathsf{False}$

である．これを同様に繰り返せば，$w \rightsquigarrow x_1 \rightsquigarrow x_2 \rightsquigarrow x_3 \rightsquigarrow \cdots$ なる無限列を作ることができる（この列上のすべて可能世界で $\Box A$ が False になる）．

(4 $\Longleftarrow$)：$\mathcal{F} = \langle W, \rightsquigarrow \rangle$ として次の二つを示す．

(†) $\mathcal{F}$ が無限遷移を持つならば $\mathcal{F} \not\models \Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

(‡) $\mathcal{F}$ が推移的でないならば $\mathcal{F} \not\models \Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

(†)： $\mathcal{F}$ が無限推移列 $\alpha : a_1 \rightsquigarrow a_2 \rightsquigarrow \cdots$ を持つと仮定する．このとき α 上の可能世界では p を False に，それ以外では p を True にする付値 V，すなわち

$$V(w, p) = \mathsf{True} \iff \forall i [w \neq a_i]$$

を考え（p 以外の命題変数についてはどうでもよい），$\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ とする．すると α 上の任意の a_i においては $\mathcal{M}(a_i, \Box p) = \mathsf{False}$ であり，任意の $w \in W$ で $\mathcal{M}(w, \Box p \to p) = \mathsf{True}$ となり，$\mathcal{M}(a_i, \Box(\Box p \to p) \to \Box p) = \mathsf{False}$ となる．

(‡)： $\mathcal{F}$ が推移的でないとする，すなわち $a \rightsquigarrow b$，$b \rightsquigarrow c$，$a \not\rightsquigarrow c$ なる $a, b, c \in W$ が存在するとする．このとき b，c では p を False に，それ以外では p を True にする付値 V，すなわち

$$V(w, p) = \mathsf{True} \iff [w \neq b \text{ かつ } w \neq c]$$

を考え（p 以外の命題変数についてはどうでもよい），$\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ とする．すると $\mathcal{M}(a, \Box p) = \mathcal{M}(b, \Box p) = \mathsf{False}$ であり，また $w \neq c$ なる任意の w で $\mathcal{M}(w, \Box p \to p) = \mathsf{True}$ となり，$\mathcal{M}(a, \Box(\Box p \to p) \to \Box p) = \mathsf{False}$ となる． **(証明終)**

反射的かつ推移的なフレーム（クリプキモデル）をS4フレーム（S4モデル）と呼ぶ．反射的，推移的，かつ対称的なフレーム（クリプキモデル），すなわち到達可能関係が同値関係であるフレーム（クリプキモデル）をS5フレーム（S5モデル）と呼ぶ．無限推移を持たず，かつ推移的なフレーム（クリプキモデル）をGLフレーム（GLモデル）と呼ぶ．すべてのS4フレームの集まり（有限S4フレームの集まり）を $\mathsf{S4}$（$\mathsf{S4}_{\mathrm{finite}}$）と書く．すべてのS5フレームの集まり（有限S5フレームの集まり）を $\mathsf{S5}$（$\mathsf{S5}_{\mathrm{finite}}$）と書く．すべてのGLフレームの集まり（有限GLフレームの集まり）を GL（$\mathsf{GL}_{\mathrm{finite}}$）と書く．

3.2 ヒルベルト流体系

ヒルベルト流体系 $\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}$，$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}$，$\mathbf{GL}_{\mathrm{H}}$を次で定義する．

$$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}} = \mathbf{K}_{\mathrm{H}} + \mathbf{T} + \mathbf{4}$$
$$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}} = \mathbf{K}_{\mathrm{H}} + \mathbf{T} + \mathbf{5}$$
$$\mathbf{GL}_{\mathrm{H}} = \mathbf{K}_{\mathrm{H}} + \mathbf{4} + \mathbf{L}$$

たとえば $\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}$ は，$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$ に3.1節の $\mathbf{T}$ と $\mathbf{4}$ という形のすべての論理式を公理として付け加えた体系である．なお，体系 $\mathbf{K}_{\mathrm{H}} + \mathbf{L}$ で論理式 $\mathbf{4}$ が証明できるので，$\mathbf{4}$ は $\mathbf{GL}_{\mathrm{H}}$の公理としなくてもよい．

定理 20（$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}$，$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}$，$\mathbf{GL}_{\mathrm{H}}$の健全性）

$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}} \vdash A$ ならば $\mathsf{S4} \models A$．$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}} \vdash A$ ならば $\mathsf{S5} \models A$．$\mathbf{GL}_{\mathrm{H}} \vdash A$ ならば $\mathsf{GL} \models A$．

(証明) 定理19を用いて，定理13と同様に A の証明に関する帰納法による（推移的かつ対称的なフレームはユークリッド的であることに注意）． **(証明終)**

3.3 シークエント計算

シークエント計算 $\mathbf{S4}_{\mathrm{G}}$，$\mathbf{S5}_{\mathrm{G}}$，$\mathbf{GL}_{\mathrm{G}}$を次で定義する．

$$\mathbf{S4}_{\mathrm{G}} = \mathbf{LK} + \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\Box\text{左}) + \frac{\Box\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\,(\Box\text{右 S4})$$
$$\mathbf{S5}_{\mathrm{G}} = \mathbf{LK} + \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\Box\text{左}) + \frac{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\Delta, A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\Delta, \Box A}\,(\Box\text{右 S5})$$
$$\mathbf{GL}_{\mathrm{G}} = \mathbf{LK} + \frac{\Gamma, \Box\Gamma, \Box A \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\,(\mathrm{GL})$$

問題 21

(1) $\mathbf{K}_{\mathrm{G}}$の規則 $(\Box)$ を，$\mathbf{S4}_{\mathrm{G}}$，$\mathbf{S5}_{\mathrm{G}}$，$\mathbf{GL}_{\mathrm{G}}$それぞれにおいて他の規則を組み合わせることによって実現できることを示せ．

(2) 次を示せ，ただし $\mathbf{T}$，$\mathbf{4}$，$\mathbf{5}$，$\mathbf{L}$ はそれぞれ $\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}$，$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}$，$\mathbf{GL}_{\mathrm{H}}$などの公理である．$\mathbf{S4}_{\mathrm{G}} \vdash \Rightarrow \mathbf{T}$．$\mathbf{S4}_{\mathrm{G}} \vdash \Rightarrow \mathbf{4}$．$\mathbf{S5}_{\mathrm{G}} \vdash \Rightarrow \mathbf{T}$．$\mathbf{S5}_{\mathrm{G}} \vdash \Rightarrow \mathbf{5}$．$\mathbf{GL}_{\mathrm{G}} \vdash \Rightarrow \mathbf{4}$．$\mathbf{GL}_{\mathrm{G}} \vdash \Rightarrow \mathbf{L}$．

定理 22（同等性）

$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}} \vdash F \iff \mathbf{S4}_{\mathrm{G}} \vdash \Rightarrow F$．$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}} \vdash F \iff \mathbf{S5}_{\mathrm{G}} \vdash \Rightarrow F$．$\mathbf{GL}_{\mathrm{H}} \vdash F \iff \mathbf{GL}_{\mathrm{G}} \vdash \Rightarrow F$．

(証明) 定理15の証明に必要な部分を加えればよい．$(\Longrightarrow)$ はいずれの場合も問題21を使えばよい．$(\Longleftarrow)$ は，$\mathbf{S4}_{\mathrm{G}}$，$\mathbf{S5}_{\mathrm{G}}$，$\mathbf{GL}_{\mathrm{G}}$で新たに加わった規則に対応して次を示せばよい：

$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}$において，$(\bigwedge(A,\Gamma))\to(\bigvee\Delta)$ から $(\bigwedge(\Box A,\Gamma))\to(\bigvee\Delta)$ を導くことができる．

$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}$において，$(\bigwedge\Box\Gamma)\to(\bigvee\{A\})$ から $(\bigwedge\Box\Gamma)\to(\bigvee\{\Box A\})$ を導くことができる．

$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}$において，$(\bigwedge(A,\Gamma))\to(\bigvee\Delta)$ から $(\bigwedge(\Box A,\Gamma))\to(\bigvee\Delta)$ を導くことができる．

$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}$において，$(\bigwedge\Box\Gamma)\to(\bigvee(\Box\Delta,A))$ から $(\bigwedge\Box\Gamma)\to(\bigvee(\Box\Delta,\Box A))$ を導くことができる．

$\mathbf{GL}_{\mathrm{H}}$において，$(\bigwedge(\Gamma,\Box\Gamma,\Box A))\to(\bigvee\{A\}))$ から $(\bigwedge\Box\Gamma)\to(\bigvee\{\Box A\})$ を導くことができる．

たとえば，この最後で $\Gamma\equiv\{B,C\}$ の場合は次のように示される．

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\bigwedge\{B,C,\Box B,\Box C,\Box A\}\to\bigvee\{A\}}{\bigwedge\{B,C,\Box B,\Box C\}\to(\Box A\to A)}\,(\text{taut})\\ \vdots\ (※)\\ \bigwedge\{\Box B,\Box C,\Box\Box B,\Box\Box C\}\to\Box(\Box A\to A)\end{array}\quad \dfrac{\mathbf{GL}_{\mathrm{H}}\text{の公理}}{\Box B\to\Box\Box B}\quad \dfrac{\mathbf{GL}_{\mathrm{H}}\text{の公理}}{\Box C\to\Box\Box C}\quad \dfrac{\mathbf{GL}_{\mathrm{H}}\text{の公理}}{\Box(\Box A\to A)\to\Box A}}{(\bigwedge\{\Box B,\Box C,\Box B,\Box C\})\to\Box A}\,(\text{taut})}{(\bigwedge\{\Box B,\Box C\})\to(\bigvee\{\Box A\})}\,(\text{taut})$$

ただし (※) の部分は定理 15 で規則 (□) についてやったのと同様である． **(証明終)**

3.4 完全性

定理 23（完全性）

$\mathbf{S4}_{\mathrm{G}}\not\vdash\ \Rightarrow F$ ならば F を偽にする有限 S4 モデルが存在する．$\mathbf{S5}_{\mathrm{G}}\not\vdash\ \Rightarrow F$ ならば F を偽にする有限 S5 モデルが存在する．$\mathbf{GL}_{\mathrm{G}}\not\vdash\ \Rightarrow F$ ならば F を偽にする有限 GL モデルが存在する．

(証明) まず S5 について示す．
クリプキモデル $\mathcal{M}=\langle\langle W,\rightsquigarrow\rangle,V\rangle$ を次で定義する．

$W=\{\Gamma\Rightarrow\Delta\mid\ \mathbf{S5}_{\mathrm{G}}\not\vdash\Gamma\Rightarrow\Delta$ かつ $\Gamma\Rightarrow\Delta$ は $\mathsf{Sub}(F)$ 極大 $\}$.

$(\Gamma\Rightarrow\Delta)\rightsquigarrow(\Pi\Rightarrow\Sigma)\quad\Longleftrightarrow\quad\Gamma_{\Box}=\Pi_{\Box}$.

$V((\Gamma\Rightarrow\Delta),p)=\mathsf{True}\quad\Longleftrightarrow\quad p\in\Gamma$.

$\mathsf{Sub}(F)$ は有限集合であることと $\rightsquigarrow$ の定義から，これは有限 S5 モデルである．ここで，任意の論理式 X と W の任意の要素 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ に対して，

$X\in\Gamma$ ならば $\mathcal{M}((\Gamma\Rightarrow\Delta),X)=\mathsf{True}$,
$X\in\Delta$ ならば $\mathcal{M}((\Gamma\Rightarrow\Delta),X)=\mathsf{False}$,

が成り立つことを，X の構成に関する帰納法で示す．

- $X\equiv\Box A$ で $X\in\Gamma$ のとき．$(\Gamma\Rightarrow\Delta)\rightsquigarrow(\Pi\Rightarrow\Sigma)$ なる任意の $\Pi\Rightarrow\Sigma\in W$ において $A\in\Pi$ となることを示せば，帰納法の仮定から言える．$A\in\Pi$ となることは次のように示される．$A\notin\Pi$ だと仮定すると $\mathsf{Sub}(F)$ 極大性から (†) $A\in\Sigma$ となる．一方 $\rightsquigarrow$ の定義と $\Box A\in\Gamma$ であることから (‡) $\Box A\in\Pi$．ところが公理と (□左) 規則によって $\mathbf{S5}_{\mathrm{G}}\vdash\Box A\Rightarrow A$ であるので，weakening 規則と (†)(‡) によって $\mathbf{S5}_{\mathrm{G}}\vdash\Pi\Rightarrow\Sigma$ となってしまい，W の定義に反する．

- $X\equiv\Box A$ で $X\in\Delta$ のとき．このとき，$\mathbf{S5}_{\mathrm{G}}\not\vdash\Box(\Gamma_{\Box})\Rightarrow\Box(\Delta_{\Box}),A$ が成り立つ．なぜならこれから規則 (□右 $S5$) と (weakening) で $\Gamma\Rightarrow\Delta$ が得られるから．すると，補題 8 によって，$\Box(\Gamma_{\Box})\subseteq\Pi$, $\Box(\Delta_{\Box})\subseteq\Sigma$，$A\in\Sigma$ なる $(\Pi\Rightarrow\Sigma)\in W$ の存在が示される．あとは $(\Gamma\Rightarrow\Delta)\rightsquigarrow(\Pi\Rightarrow\Sigma)$ が言えれば，帰納法の仮定により $\mathcal{M}((\Gamma\Rightarrow\Delta),\Box A)=\mathsf{False}$ となる．$(\Gamma\Rightarrow\Delta)\rightsquigarrow(\Pi\Rightarrow\Sigma)$ を示すためには $\Box B\in\Gamma\Longleftrightarrow\Box B\in\Pi$ が $\mathsf{Sub}(F)$ 中の任意の $\Box B$ について成り立つことを示せばよい．この $(\Longrightarrow)$ は $\Pi\Rightarrow\Sigma$ の作り方から明らか．$(\Longleftarrow)$ は，$\Gamma\Rightarrow\Delta$ の $\mathsf{Sub}(F)$ 極大性や $\Pi\Rightarrow\Sigma$ の作り方や $\mathbf{S5}_{\mathrm{G}}$証明不可能性から，次のように対偶が示される：$\Box B\notin\Gamma\Longrightarrow\Box B\in\Delta\Longrightarrow\Box B\in\Sigma\Longrightarrow\Box B\notin\Pi$.

後は定理 16 と同じ．

S4, GL についてもほぼ同様にやればよい．その際，S4 については $\leadsto$ を次で定義すればよい．

$$(\Gamma \Rightarrow \Delta) \leadsto (\Pi \Rightarrow \Sigma) \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma_\Box \subseteq \Pi_\Box$$ （あるいは「$\Gamma_\Box \subseteq \Pi$ かつ $\Gamma_\Box \subseteq \Pi_\Box$」でも同じ）．

また，GL に関しては次で定義すればよい．

$$(\Gamma \Rightarrow \Delta) \leadsto (\Pi \Rightarrow \Sigma) \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma_\Box \subseteq \Pi \text{ かつ } \Gamma_\Box \subsetneq \Pi_\Box.$$

(証明終)

定理 24（S4，S5，GL の完全性，健全性，有限モデル性）

(S4) 次の四条件は同値である：$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}} \vdash A$．$\mathbf{S4}_{\mathrm{G}} \vdash \Rightarrow A$．$\mathsf{S4} \models A$．$\mathsf{S4}_{\mathrm{finite}} \models A$．

(S5) 次の四条件は同値である：$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}} \vdash A$．$\mathbf{S5}_{\mathrm{G}} \vdash \Rightarrow A$．$\mathsf{S5} \models A$．$\mathsf{S5}_{\mathrm{finite}} \models A$．

(GL) 次の四条件は同値である：$\mathbf{GL}_{\mathrm{H}} \vdash A$．$\mathbf{GL}_{\mathrm{G}} \vdash \Rightarrow A$．$\mathsf{GL} \models A$．$\mathsf{GL}_{\mathrm{finite}} \models A$．

(証明) 定理 20，22，23 による． **(証明終)**

これらの様相論理をそれぞれ **S4**，**S5**，**GL** と呼ぶ．

問題 18 の直前の説明（または問題 18 と同じ方法—**S5** のカット除去はそのままではだめだが）により，**S4**，**S5**，**GL** も決定可能であることが言える．

問題 25（カット除去定理の意味論的証明）

問題 11 と同様にして，$\mathbf{K}_{\mathrm{G}}$，$\mathbf{S4}_{\mathrm{G}}$，$\mathbf{GL}_{\mathrm{G}}$のカット除去定理を証明せよ．また，この方法は$\mathbf{S5}_{\mathrm{G}}$に対してはうまくいかないことを説明せよ．ヒント：クリプキモデルを作る際に,「$\mathsf{Sub}(F)$ 極大」ではなく「飽和」を可能世界の条件とする．

問題 26

$\mathbf{S5}_{\mathrm{G}}$ではカット除去定理が成り立たないことを証明せよ．たとえば，次のシークエントが反例になっていることを示せばよい：$p \Rightarrow \Box\neg\Box\neg p$. (問題 21(2) で $\mathbf{S5}_{\mathrm{G}} \vdash \neg\Box\neg p \Rightarrow \Box\neg\Box\neg p$ は示してある.)

4 様相μ計算

4.1 論理式

様相μ計算の論理式は，1.1，2.1 節の「記号」に

4. **不動点演算子**: μ

を加え,「論理式の定義」に

4. A が論理式で p が命題変数ならば $(\mu p.A)$ も論理式である

を加えることで定義される（ただし後述のように，このように定義したすべての論理式をμ計算で扱うわけではない）．

注意：通常「様相μ計算」と言うと，複数の様相記号 $\Box_1, \Box_2, \ldots$ を持つが，本稿では簡単のために $\Box$ ただ一つにする．様相記号が複数あっても，モデルにおいて別々の到達可能関係に対応しているだけで,

一つだけの場合と本質的な違いはない．

$\mu p.A$ という形の論理式を μ論理式 と呼ぶ．$\mu p.A$ の A 中に出現する p は 束縛出現 と言う．束縛出現でない命題変数の出現を 自由出現 と言う．

論理式 A 中の命題変数 p のすべての自由出現を B で置き換えた論理式を $A[B/p]$ と書く．なお，こう書いたときにはこの置き換えによって新たな束縛関係が生じないものと仮定する．たとえば，$(\mu q.(q{\wedge}p))[\Box q/p]$ はダメで，これをやりたいときは束縛変数の名前を変えて $(\mu q'.(q'{\wedge}p))[\Box q/p]$ とする．

$\nu p.A$ を $\neg\mu p.(\neg A[\neg p/p])$ の省略形として用いる．

$p \overset{+}{\prec} A$，$p \overset{-}{\prec} A$ （論理式 A における命題変数 p の自由出現はすべて positive／negative である）という概念は，1.1，2.1 節の再帰的定義に次を追加することで得られる．

$$p \overset{+}{\prec} \mu p.A. \qquad p \overset{-}{\prec} \mu p.A.$$
$$p \overset{+}{\prec} \mu q.A \iff p \overset{+}{\prec} A. \qquad p \overset{-}{\prec} \mu q.A \iff p \overset{-}{\prec} A. \qquad (\text{ただし } p \not\equiv q)$$

$p \overset{+}{\prec} A$ のとき，μ論理式 $\mu p.A$ は 正規 である，と言う．**以後登場するμ論理式は（他の論理式の部分式として登場する場合も含めて）すべて正規であると仮定する．**

4.2 モデル

様相μ計算のモデルは様相論理のクリプキモデルと同じであり，μ論理式以外は 2.2 節と同じに扱われる．ところで 2.2 節では「$\mathcal{M}(w,A) = \mathsf{True}\ \text{ or }\ \mathsf{False}$」であった，すなわち各可能世界における各論理式の真理値に着目していた．しかしこの節では「各論理式に対して，それが真になる可能世界全体の集合」に着目して解釈を定める．この方がμ論理式を自然に扱えるからである．

フレーム $\mathcal{F} = \langle W, \rightsquigarrow\rangle$ に対して，写像

$$V : \mathbf{PropVar} \to \mathcal{P}(W) \quad (\text{ただし } \mathcal{P}(W) \text{ は } W \text{ の部分集合全体})$$

を $\mathcal{F}$ 上の 付値 と呼び，フレームと付値の組 $\langle\langle W, \rightsquigarrow\rangle, V\rangle$ を クリプキモデル または単に モデル と呼ぶ．

モデル $\mathcal{M} = \langle\langle W, \rightsquigarrow\rangle, V\rangle$ において,「論理式 X が成り立つ可能世界全体の集合」を $\mathcal{M}(X)$ と書く $\mathcal{M}(X)$ は W の部分集合であり，次のように X の構成に関して再帰的に定義される．

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}(p) = V(p).\\
&\mathcal{M}(A{\wedge}B) = \mathcal{M}(A) \cap \mathcal{M}(B).\\
&\mathcal{M}(A{\vee}B) = \mathcal{M}(A) \cup \mathcal{M}(B).\\
&\mathcal{M}(A{\to}B) = \mathcal{M}(A)^{\mathbf{c}} \cup \mathcal{M}(B).\\
&\mathcal{M}(\neg A) = \mathcal{M}(A)^{\mathbf{c}}.\\
&\mathcal{M}(\Box A) = \{w \in W \mid w \rightsquigarrow x \text{ となるすべての } x \in W \text{ に対して } x \in \mathcal{M}(A)\}.\\
&\mathcal{M}(\mu p.A) = \bigcap\{\alpha \subseteq W \mid \mathcal{M}[\alpha/p](A) \subseteq \alpha\}.
\end{aligned}$$

ただし α の補集合を $\alpha^{\mathbf{c}}$ と表記する．また，$\mathcal{M}[\alpha/p]$ は「$\mathcal{M}$ の p に対する割り当てだけを α に変えたモデル」であり，正確には

$$\mathcal{M}[\alpha/p] \;=\; \langle\langle W, \rightsquigarrow\rangle, V'\rangle, \qquad \text{ただし} \begin{cases} V'(p) = \alpha \\ V'(q) = V(q) \qquad (q \not\equiv p \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

問題 27

(1) 論理式 A に関する帰納法により次を示せ：$\mathcal{M}[\alpha^{\mathrm{c}}/p](A) = \mathcal{M}[\alpha/p](A[\neg p/p])$.
(2) (1) を用いて次を示せ：$\mathcal{M}(\nu p.A) = \bigcup\{\alpha \subseteq W \mid \mathcal{M}[\alpha/p](A) \supseteq \alpha\}$.

モデル $\mathcal{M} = \langle\langle W, \rightsquigarrow\rangle, V\rangle$ と論理式 A と命題変数 p が与えられると，$\mathcal{P}(W)$ 上の関数

$$\alpha \mapsto \mathcal{M}[\alpha/p](A)$$

が定まる．この関数を「$\mathcal{M}$，A，p で定まる関数」と呼び，（文脈から $\mathcal{M}$，p が明らかな場合には）単に A と表記する．すなわち，$\alpha \subseteq W$ に対して，

$$A(\alpha) = \mathcal{M}[\alpha/p](A)$$

である．

定理 28（単調性）

(1) $p \overset{+}{\prec} A$ ならば，$\mathcal{M} = \langle\langle W, \rightsquigarrow\rangle, V\rangle$，$A$，$p$ で定まる関数は任意の $\alpha, \beta \subseteq W$ に対して次を満たす：$\alpha \subseteq \beta$ ならば $A(\alpha) \subseteq A(\beta)$.

(2) $p \overset{-}{\prec} A$ ならば，$\mathcal{M} = \langle\langle W, \rightsquigarrow\rangle, V\rangle$，$A$，$p$ で定まる関数は任意の $\alpha, \beta \subseteq W$ に対して次を満たす：$\alpha \subseteq \beta$ ならば $A(\beta) \subseteq A(\alpha)$.

(証明) (1)(2) 同時に A に関する帰納法による．以下では，$A \equiv \mu q.B$（ただし $q \not\equiv p$）の場合の (1) だけを示す．すなわち，モデル $\mathcal{M} = \langle\langle W, \rightsquigarrow\rangle, V\rangle$ と $\alpha, \beta \subseteq W$ について $\alpha \subseteq \beta$ であると仮定して，$\mathcal{M}[\alpha/p](\mu q.B) \subseteq \mathcal{M}[\beta/p](\mu q.B)$ となることを証明する．いま，$\mathcal{P}(W)$ の二つの部分集合 R_α，R_β を

$$R_\alpha = \{\gamma \subseteq W \mid \mathcal{M}[\alpha/p][\gamma/q](B) \subseteq \gamma\}, \qquad R_\beta = \{\gamma \subseteq W \mid \mathcal{M}[\beta/p][\gamma/q](B) \subseteq \gamma\}$$

とする．$\mathcal{M}[\alpha/p](\mu q.B) = \bigcap R_\alpha$，$\mathcal{M}[\beta/p](\mu q.B) = \bigcap R_\beta$ であるので，すべての $\gamma \subseteq W$ について

(†) $\gamma \in R_\beta$ ならば $\gamma \in R_\alpha$

が言えれば求めるものは証明される．(†) は，帰納法の仮定を $\mathcal{M}' = \mathcal{M}[\gamma/q]$ について適用した

$$\mathcal{M}'[\alpha/q](B) \subseteq \mathcal{M}'[\beta/q](B)$$

と，R_α，R_β の定義と，$\mathcal{M}'[\alpha/p] = \mathcal{M}[\alpha/p][\gamma/q]$，$\mathcal{M}'[\beta/p] = \mathcal{M}[\beta/p][\gamma/q]$ から言える． **(証明終)**

モデル $\mathcal{M} = \langle\langle W, \rightsquigarrow\rangle, V\rangle$ と論理式 A と命題変数 p に対して，$\alpha \subseteq W$ が

$$\alpha = A(\alpha) \quad (= \mathcal{M}[\alpha/p](A))$$

を満たすとき，α は $\mathcal{M}$，A，p で定まる関数の不動点である，と言う．

定理 29（最小不動点）

$\mathcal{M}(\mu p.A)$ は $\mathcal{M}$，A，p で定まる関数の最小不動点である．すなわち，$\mathcal{M}(\mu p.A)$ はこの関数の不動点であり，この関数の他のどんな不動点 α に対しても $\mathcal{M}(\mu p.A) \subseteq \alpha$ となる．

(証明) $\alpha_0 = \mathcal{M}(\mu p.A)$，$R = \{\alpha \mid A(\alpha) \subseteq \alpha\}$ と置くと $\alpha_0 = \bigcap R$ であり，

(†) $\forall\alpha \in R\ [\alpha_0 \subseteq \alpha]$,
(‡) $\Big(\forall\alpha \in R\ [\beta \subseteq \alpha]\Big) \Longrightarrow \beta \subseteq \alpha_0$

（β は任意）が成り立つ．これらを使って，α_0 が関数 A の最小不動点であることを順に示していく．

(ア) $A(\alpha_0) \subseteq \alpha_0$ であること．α を R の任意の要素とする．

(※) $A(\alpha_0) \subseteq \alpha$

が示されれば，(‡) で $\beta = A(\alpha_0)$ とすることで $A(\alpha_0) \subseteq \alpha_0$ は示される．(※) は次のように示される．(†) と定理 28(1) から（ここで論理式が正規であることを用いる）$A(\alpha_0) \subseteq A(\alpha)$ である．ところで R の定義から $A(\alpha) \subseteq \alpha$ である．したがって $A(\alpha_0) \subseteq \alpha$ が言える．

(イ) $\alpha_0 \subseteq A(\alpha_0)$ であること．(ア) と定理 28(1) から $A(A(\alpha_0)) \subseteq A(\alpha_0)$ となる．したがって R の定義により $A(\alpha_0) \in R$ であり，(†) によって $\alpha_0 \subseteq A(\alpha_0)$ が言える．

以上の（ア）（イ）により $\alpha_0 = A(\alpha_0)$ すなわち α_0 が不動点であることが言えた．最小性は次のように示される．α が A の不動点であるとすると $A(\alpha) \subseteq \alpha$ であるので，R の定義から $\alpha \in R$ となり，(†) から $\alpha_0 \subseteq \alpha$ となる． **(証明終)**

問題 30（最大不動点）

次を示せ：$\mathcal{M}(\nu p.A)$ は $\mathcal{M}$，A，p で定まる関数の最大不動点である．すなわち，$\mathcal{M}(\nu p.A)$ はこの関数の不動点であり，この関数の他のどんな不動点 α に対しても $\alpha \subseteq \mathcal{M}(\nu p.A)$ となる．

不動点演算子を使うとモデルに関する様々な条件を論理式で記述することができる．以下の定理はそのようなものの代表例である．

定理 31（不動点演算子を使った論理式の例）

A，B は p の自由出現を含まない論理式，$\mathcal{M} = \langle\langle W, \rightsquigarrow\rangle, V\rangle$ はモデルとする．

(1) $w \in \mathcal{M}(\mu p.(A \vee \Box p)) \iff w$ から始まる任意の無限遷移列は $\mathcal{M}(A)$ と交わりを持つ．ただし遷移列 $w_1 \rightsquigarrow w_2 \rightsquigarrow \cdots$ が可能世界のある集合 α と交わりを持つとは，$\exists n[w_n \in \alpha]$ ということである．

(2) $w \in \mathcal{M}(\mu p.(A \vee \Diamond p)) \iff \exists n \geq 0, \exists x_0, x_1, \ldots, x_n \in W[w = x_0 \rightsquigarrow x_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x_n$ かつ $x_n \in \mathcal{M}(A)]$ （すなわち，w から複数ステップで到達可能で A が成り立つ世界がある）．

(3) $w \in \mathcal{M}(\nu p.(A \vee (B \wedge \Box p))) \iff \forall n \geq 0, \forall x_0, x_1, \ldots, x_n \in W[w = x_0 \rightsquigarrow x_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x_n$ かつ $x_n \notin \mathcal{M}(B)$ ならば,$\exists i \leq n[x_i \in \mathcal{M}(A)]]$ （すなわち，w から始まるどんな遷移列においても，A が成り立たない間はずっと B が成り立っている）．

(証明) (1) だけ示す（他も難しくはない）．$\mathcal{M}$，$(A \vee \Box p)$，p で定まる関数を α に適用した結果を $A \vee \Box\alpha$ と書く．$\alpha_0 = \{w \in W \mid w$ から始まる任意の無限遷移列は $\mathcal{M}(A)$ と交わりを持つ $\}$ として，これが関数 $\lambda\alpha.(A \vee \Box\alpha)$ の最小不動点であることを示せば，定理 29 から $\alpha_0 = \mathcal{M}(\mu p.(A \vee \Box p))$ となる（最小不動点は唯一なので）．

(ア) $(A \vee \Box\alpha_0) \subseteq \alpha_0$ であること．$A \subseteq \alpha_0$ と $\Box\alpha_0 \subseteq \alpha_0$ を示す．前者は α_0 の定義から明らか．後者は次のように示される．もしも $\Box\alpha_0 \not\subseteq \alpha_0$ だとすると，

$x \rightsquigarrow y$ なる任意の y について $y \in \alpha_0$，かつ $x \notin \alpha_0$

となる x が存在することになるが，x から始まる無限遷移列を考えると，α_0 の定義とこの条件を同時に満たすことはできない．

(イ) $\alpha_0 \subseteq (A \vee \Box\alpha_0)$ であること．もしも $\alpha_0 \not\subseteq (A \vee \Box\alpha_0)$ と仮定すると，

$x \in \alpha_0$，$x \notin \mathcal{M}(A)$，かつ，$x \rightsquigarrow y$ なる y が存在して $y \notin \alpha_0$

となる x が存在することになるが，y から始まり $\mathcal{M}(A)$ と交わりを持たない無限遷移列の存在を考えると，α_0 の定義とこの条件を同時に満たすことはできない．

以上の（ア）（イ）から α_0 が不動点であることが示された．最小性は次のように示される．$\beta \subsetneq \alpha_0$ なる不動点 β があると仮定する．すると $\beta = (A \vee \Box\beta)$ であり，α_0 と β の「隙間」に次の条件を満たす x_1 が存在することになる．

$x_1 \in \alpha_0$，$x_1 \notin \mathcal{M}(A)$，かつ，$x_1 \rightsquigarrow x_2$ なる x_2 が存在して $x_2 \notin \beta$.

すると（イ）と同様の議論で，この x_2 は α_0 の外ではなく α_0 と β の「隙間」に存在することになるので，ふたたび上と同様に次が成り立つ．

$x_2 \in \alpha_0$，$x_2 \notin \mathcal{M}(A)$，かつ，$x_2 \rightsquigarrow x_3$ なる x_3 が存在して $x_3 \notin \beta$.

この議論を続けていくと，すべての i について $x_i \notin \mathcal{M}(A)$ となる無限遷移 $x_1 \rightsquigarrow x_2 \rightsquigarrow x_3 \rightsquigarrow \cdots$ が存在することになる．しかしこれは α_0 の定義に反する． **(証明終)**

4.3　公理系

2.3 節の $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$ に次の公理と規則を加えた体系を $\mu\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$ と呼ぶ．

公理： $A[(\mu p.A)/p] \rightarrow \mu p.A$.

規則： $\dfrac{A[B/p]\rightarrow B}{(\mu p.A)\rightarrow B}$

定理 32（$\mu\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$ の完全性，健全性，有限モデル性）

次の三条件は同値である．(1) $\mu\mathbf{K}_{\mathrm{H}} \vdash A$．(2) どんなモデル $\mathcal{M} = \langle\langle W, \rightsquigarrow\rangle, V\rangle$ においても $\mathcal{M}(A) = W$．(3) どんな有限モデル $\mathcal{M} = \langle\langle W, \rightsquigarrow\rangle, V\rangle$ においても $\mathcal{M}(A) = W$．

この (1) $\Longrightarrow$(2) $\Longrightarrow$(3) は簡単であるが，その他を示すことは結構難しい．たとえば (2) $\Longrightarrow$(1) （(3) $\Longrightarrow$(1)？）が文献 [3] に載っている（そうだ）が，この論文は，誰にも理解できないということで悪名高い．$\mu\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$ の完全性（や有限モデル性）の簡単な証明を与えることができれば，とても良い結果と言えよう．

参考文献

[1] 小野寛晰，**情報科学における論理**（日本評論社，1994）．

[2] J.Bradfield and C.Stirling, *Modal Logics and mu-Calculi: An Introduction*, **Handbook of Process Algebga** (edited by J.A.Bergstra, A.Ponse and S.A.Smolka, Elsevir, 2001).

[3] I.Walukiewicz, *Completeness of Kozen's Axiomatization of the Propositional μ-Calculus* **Information and Computation 157**, 142-182 (2000).