論理体系の完全性証明
様相述語論理のツリーシークエントによる方法など

2004 年 7 月 20 日

鹿島 亮（東京工業大学 情報理工学研究科）

1 古典述語論理

1.1 論理式

$\equiv$ は「記号列として等しい」ことを表す．記号列 α 中の文字 x をすべて文字列 β に書き換えた結果の記号列を $\alpha[\beta/x]$ と書く．

この講義での古典述語論理の言語は以下の記号を持つ．

1. **自由変数記号**．可算無限ある．$a, b, \ldots$ 等で表す．
2. **束縛変数記号**．可算無限ある．$x, y, \ldots$ 等で表す．
3. **定数記号**．有限または可算無限ある．$\mathbf{c}, \mathbf{d}, \ldots$ 等で表す．
4. **述語記号**．有限または可算無限ある．$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \ldots$ 等で表す．各述語記号には，0 以上有限の引数の個数が決まっている，
5. **論理記号**: $\top$，$\bot$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\neg$．$\forall$．$\exists$．

（**注意**）議論を簡単にするために「関数記号」,「等号」は持たない．

自由変数記号および定数記号のことを**項**と呼ぶ．

論理式は以下で再帰的に定義される．

1. 0 引数述語記号は論理式である．これを**命題変数**または**命題記号**と呼ぶ．
2. $n \geq 1$ で $\mathbf{p}$ が n 引数述語記号で $t_1, \ldots, t_n$ が項ならば，$\mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n)$ は論理式である．
3. $\top$ と $\bot$ はそれぞれ論理式である．
4. A，B が論理式ならば，次の四つ：$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(\neg A)$ もそれぞれ論理式である．
5. A が論理式，x が A 中に出現しない束縛変数記号，a が自由変数記号ならば，次の二つ：$(\forall x A[x/a])$，$(\exists x A[x/a])$，もそれぞれ論理式である．

1,2,3 の論理式を**原子論理式**とも呼ぶ．また，1,3,4 だけで定まる論理式（つまり，命題変数と $\top$，$\bot$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\neg$ だけで構成される論理式）を**命題論理の論理式**とも呼ぶ．5 の「x が A 中に出現しない」という条件は，同一の束縛変数の有効範囲が重複することを避けるためについている．

自由変数記号が出現しない論理式のことを**閉論理式**と呼ぶ．

t, s 等で項を，A, B, C 等で論理式を，Γ, Δ 等で論理式の集合を表す．$\{\neg, \forall, \exists\} > \wedge > \vee > \rightarrow$ という優先順位をつけて括弧を省略する．

$$例：\forall x \neg A \vee B \wedge C \to D \equiv \Big(((\forall x \neg A) \vee (B \wedge C)) \to D\Big).$$

$A \leftrightarrow B$ を $((A \to B) \wedge (B \to A))$ の省略形として用いる．

論理式の有限集合 $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ に対して

$$\bigwedge \Gamma \equiv \top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n, \qquad \bigvee \Gamma \equiv \bot \vee A_1 \vee \cdots \vee A_n$$

とする．

1.2 ストラクチャー

次のような $\mathcal{D}$ と $\mathcal{I}$ の組 $\langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ を**ストラクチャー**と呼ぶ．

- **対象領域**と呼ばれる空でない集合 $\mathcal{D}$．
- 定数記号と述語記号の意味を決める**解釈** $\mathcal{I}$．ただしこれは次のものから成る．
  - 各定数記号が $\mathcal{D}$ のどの要素を指しているか．定数記号 $\mathbf{c}$ が指す $\mathcal{D}$ の要素を $\mathbf{c}^{\mathcal{I}}$ と書く．
  - 各述語記号が $\mathcal{D}$ 上でどんな述語を意味しているか．n 引数述語記号 $\mathbf{p}$ の意味を $\mathbf{p}^{\mathcal{I}}$ と書く．これは「$\mathcal{D}^n$ から真理値 $\{\mathsf{True}\,(真), \mathsf{False}\,(偽)\}$ への関数」であり，$n = 0$ の場合は $\mathbf{p}^{\mathcal{I}} \in \{\mathsf{True}, \mathsf{False}\}$ である．

閉論理式の真偽はストラクチャーを定めれば決まる．これを正確に定義するために**名前定数拡張言語**というものを導入する．

$\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ をストラクチャーとする．$\mathcal{D}$ の各要素の**名前**を定数記号として加えた言語を「$\mathcal{D}$ の名前定数拡張言語」と呼ぶ．$\mathcal{D}$ の要素 δ の名前が $\mathbf{d}$ であるとき $\mathbf{d}$ の解釈は（当然）δ とする，すなわち $\mathbf{d}^{\mathcal{I}} = \delta$ と定義する．

A を上のような名前定数拡張言語の閉論理式とする．A がストラクチャー $\mathcal{M}$ においてとる真理値 $\mathcal{M}(A)$ を，次のように再帰的に定義する．

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n)) = \mathsf{True} \iff \mathbf{p}^{\mathcal{I}}(\mathbf{c}_1^{\mathcal{I}}, \ldots, \mathbf{c}_n^{\mathcal{I}}) = \mathsf{True}.$$

$$\mathcal{M}(\top) = \mathsf{True}.$$
$$\mathcal{M}(\bot) = \mathsf{False}.$$

$$\mathcal{M}(A \wedge B) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(A) = \mathsf{True}\ かつ\ \mathcal{M}(B) = \mathsf{True}.$$
$$\mathcal{M}(A \vee B) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(A) = \mathsf{True}\ または\ \mathcal{M}(B) = \mathsf{True}.$$
$$\mathcal{M}(A \to B) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(A) = \mathsf{False}\ または\ \mathcal{M}(B) = \mathsf{True}.$$
$$\mathcal{M}(\neg A) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(A) = \mathsf{False}.$$

$$\mathcal{M}(\forall x A) = \mathsf{True} \iff \mathcal{D}\ の任意の要素の名前\ \mathbf{d}\ に対して\ \mathcal{M}(A[\mathbf{d}/x]) = \mathsf{True}.$$
$$\mathcal{M}(\exists x A) = \mathsf{True} \iff \mathcal{D}\ のある要素の名前\ \mathbf{d}\ に対して\ \mathcal{M}(A[\mathbf{d}/x]) = \mathsf{True}.$$

A は名前定数を含まない論理式で，A に現われるすべての自由変数記号を $a_1, \ldots, a_n$（$n \geq 0$）とする（$a_1, \ldots, a_n$ はすべて異なる）．このとき次の条件が成り立つことを A が**恒真である**と言う．

任意のストラクチャー $\mathcal{M}$ とその対象領域の任意の要素の名前 $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n$ に対して，
$\mathcal{M}(A[\mathbf{d}_1/a_1]\cdots[\mathbf{d}_n/a_n]) = \mathsf{True}$.

恒真な命題論理式のことは**トートロジー**とも言う.

問題 1

$\mathcal{M} = \langle\mathcal{D},\mathcal{I}\rangle$ をストラクチャーとし，定数 $\mathbf{c}$ の指す先の名前を $\mathbf{d}$ とする，すなわち $\mathbf{c}^{\mathcal{I}} = \mathbf{d}^{\mathcal{I}}$ が成り立つとする．このとき，A が $\mathcal{D}$ の名前定数拡張言語の論理式で自由変数は a だけを含むもののとき，二つの閉論理式 $A[\mathbf{c}/a]$ と $A[\mathbf{d}/a]$ の $\mathcal{M}$ における真理値は等しい，すなわち $\mathcal{M}(A[\mathbf{c}/a]) = \mathcal{M}(A[\mathbf{d}/a])$ であることを，A の長さに関する帰納法で証明せよ.

1.3　ヒルベルト流体系

以下の公理と推論規則で論理式を証明する体系を $\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$ と呼ぶ.

公理：次の形をした論理式すべて
$\top$，$\neg\bot$，$A{\to}(B{\to}A)$，$(A{\to}(B{\to}C)){\to}((A{\to}B){\to}(A{\to}C))$，$A{\to}(B{\to}(A{\wedge}B))$，$(A{\wedge}B){\to}A$，$(A{\wedge}B){\to}B$，$A{\to}(A{\vee}B)$，$B{\to}(A{\vee}B)$，$(A{\to}C){\to}((B{\to}C){\to}((A{\vee}B){\to}C))$，$(A{\to}B){\to}((A{\to}\neg B){\to}\neg A)$，$\forall xA{\to}(A[t/x])$，$(A[t/x]){\to}\exists xA$，$\neg\neg A{\to}A$.

推論規則:

$$\frac{A{\to}B \quad A}{B}\ \text{(modus ponens)} \qquad \frac{A{\to}(B[a/x])}{A{\to}\forall xB}\ (\forall) \qquad \frac{(B[a/x]){\to}A}{\exists xB{\to}A}\ (\exists)$$

ただし $\forall$ と $\exists$ の規則は次の条件が満たされているときのみ使用可能である.

（$\forall$,$\exists$ **規則の変数条件**）a は A, B 中に出現しない自由変数である.

（**注意**）たとえば $\forall xA$ と書いたら，A 単独に見ると束縛されていない x が現われるかもしれないので，A は一般に論理式ではない（A の x を項 t に置き換えた $A[t/x]$ は論理式である）.

$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$のように,「各論理結合子の性質を表した多くの公理と，modus ponens を含む少しの規則を持ち，論理式を単位として推論が進んでいく体系」のことを，一般にヒルベルト流体系と呼ぶ（$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$の H は Hilbert を表す）．ヒルベルト流体系 $\mathcal{X}$ で論理式 A が証明できることを

$$\mathcal{X} \vdash A$$

と書く.

$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$から，公理 $\forall xA{\to}(A[t/x])$，$(A[t/x]){\to}\exists xA$ と規則 $(\forall)$，$(\exists)$ を取り除いた体系を $\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$と呼ぶ.

定理 2（$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$で証明可能な論理式の例）

$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash A{\to}A$.　$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash (A{\to}B) \to ((B{\to}C) \to (A{\to}C))$.　$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash A{\vee}\neg A$.（以上の三つはいずれも $\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$で証明できる.）$x$ が C に出現しないとき，$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash \forall x(C \vee D) \to (C \vee \forall xD)$.

(証明)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{公理}}{\Big(A\to((A\to A)\to A)\Big)\to\Big((A\to(A\to A))\to(A\to A)\Big)}\quad\dfrac{\text{公理}}{A\to((A\to A)\to A)}}{(A\to(A\to A))\to(A\to A)}\ (\text{m.p.})\quad\dfrac{\text{公理}}{A\to(A\to A)}}{A\to A}\ (\text{m.p.})
$$

他は省略（案外難しい）． **(証明終)**

定理 3（$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$で使用可能な規則の例）

「$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash A\to B$ かつ $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash B\to C$」ならば $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash A\to C$ である．すなわち，$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$において次の規則を使ってもよい：

$$
\dfrac{A\to B \quad B\to C}{A\to C}\ (\text{transitive})
$$

(証明) 定理 2 の二つ目の論理式と modus ponens の組合せによる． **(証明終)**

問題 4

$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$において次の規則も使ってよいことを示せ.

$$
\dfrac{A\to B \quad B\to A}{A\leftrightarrow B}\ (\leftrightarrow \text{導入}) \qquad \dfrac{A\leftrightarrow B}{A\to B}\ (\leftrightarrow \text{除去}) \qquad \dfrac{A\leftrightarrow B}{B\to A}\ (\leftrightarrow \text{除去})
$$

定理 5（$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$の健全性）

$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash F$ ならば F は恒真である．

(証明) $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash F$ の証明図に関する帰納法による．すなわち，$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$の公理がすべて恒真であること，各規則において，前提が恒真である場合は結論も恒真になること，を示せばよい．たとえば公理 $\forall xA\to(A[t/x])$ については次のように示される．

この論理式中すべての自由変数を $a_1,\ldots,a_n$（すべて異なる）とし，$\mathcal{M}$ を任意のストラクチャー，$\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n$ を対象領域の任意の要素の名前とし，自由変数への名前の一斉代入（連続代入）$[\mathbf{d}_1/a_1]\cdots[\mathbf{d}_n/a_n]$ を * と表記する．このとき，$\mathcal{M}((\forall xA\to(A[t/x]))^*) = \mathsf{True}$ を示せばよいが，これは次のようにする．項 t^* の $\mathcal{M}$ による指す先の名前を $\mathbf{c}$ とする．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}((\forall xA)^*) = \mathsf{True} \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{D}\ \text{の任意の要素の名前}\ \mathbf{d}\ \text{に対して}\ \mathcal{M}(A^*[\mathbf{d}/x]) = \mathsf{True}\\
&\Longrightarrow \quad \mathcal{M}(A^*[\mathbf{c}/x]) = \mathsf{True}\\
&\Longrightarrow \quad \mathcal{M}(A^*[t^*/x]) = \mathsf{True} \qquad \text{（問題 1 より）}\\
&\Longrightarrow \quad \mathcal{M}((A[t/x])^*) = \mathsf{True}
\end{aligned}
$$

(証明終)

定理 6

論理式 X 中のいくつかの自由変数記号を束縛変数記号に変える

$$[x_1/a_1]\cdots[x_n/a_n]$$

(ただし $a_1,\ldots,a_n$ は互いに異なる自由変数記号，$x_1,\ldots,x_n$ は X 中に存在しない互いに異なる束縛変数記号）という形の置換を「X の自由変数の束縛化置換」と呼ぶ．論理式 A，B，F，命題記号 $\mathbf{p}$，および A, B の自由変数の束縛化置換 * が，

$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash A{\leftrightarrow}B$，かつ $F[A^*/\mathbf{p}]$ と $F[B^*/\mathbf{p}]$ は共に論理式である

を満たすならば，

$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash F[A^*/\mathbf{p}]{\leftrightarrow}F[B^*/\mathbf{p}]$

である．すなわち，論理式の一部分をその部分との同値性が証明できるような別の式に置き換えても，全体の証明可能性は変化しない．(たとえば，A，B をそれぞれ自由変数 a の出現を明示して $A(a)$，$B(a)$ と書くとき，

$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash A(a){\leftrightarrow}B(a)$

ならば

$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash \forall x(A(x){\wedge}C(x)) \leftrightarrow \forall x(B(x){\wedge}C(x))$

である，ということ．この場合 $F \equiv \forall x(\mathbf{p}{\wedge}C(x))$ である.)

(証明)　F の長さに関する帰納法による．ここでは $F \equiv \forall xG$ で束縛化置換 * が

$[x_1/a_1]\cdots[x_n/a_n][x/a]$

で a が G 中に現われない場合を示す．束縛化置換

$[x_1/a_1]\cdots[x_n/a_n]$

を $^{*-}$ と書くこと，

$(\dagger)\ G[A^*/\mathbf{p}][a/x] \equiv G[a/x][A^{*-}/\mathbf{p}]$，　$(\ddagger)\ G[B^*/\mathbf{p}][a/x] \equiv G[a/x][B^{*-}/\mathbf{p}]$

が成り立つことに注意する．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{公理}}{\forall xG[A^*/\mathbf{p}]{\to}G[A^*/\mathbf{p}][a/x]} \quad \dfrac{\dfrac{G[a/x]\ \text{と}\ {}^{*-}\ \text{に対する帰納法の仮定}}{G[a/x][A^{*-}/\mathbf{p}]{\leftrightarrow}G[a/x][B^{*-}/\mathbf{p}]}}{G[a/x][A^{*-}/\mathbf{p}]{\to}G[a/x][B^{*-}/\mathbf{p}]}\,(\leftrightarrow\text{除去})}{\forall xG[A^*/\mathbf{p}]{\to}G[a/x][B^{*-}/\mathbf{p}]}\,(\mathrm{tr.})(\dagger)}{\forall xG[A^*/\mathbf{p}]{\to}\forall xG[B^*/\mathbf{p}]}\,(\forall)(\ddagger) \qquad \begin{matrix}\vdots\ \text{左と同様}\\ \forall xG[B^*/\mathbf{p}]{\to}\forall xG[A^*/\mathbf{p}]\end{matrix}}{\forall xG[A^*/\mathbf{p}]{\leftrightarrow}\forall xG[B^*/\mathbf{p}]}\,(\leftrightarrow\text{導入})$$

(証明終)

問題 7

次を示せ．$\{A_1,\ldots,A_m\} = \{B_1,\ldots,B_n\}$ であり，$A^{\wedge}$ は $A_1,\ldots,A_m$ すべてを勝手な順番で $\wedge$ でつないだ論理式，$A^{\vee}$ は $A_1,\ldots,A_m$ すべてを勝手な順番で $\vee$ でつないだ論理式，$B^{\wedge}$ は $B_1,\ldots,B_n$ すべてを勝手な順番で $\wedge$ でつないだ論理式，$B^{\vee}$ は $B_1,\ldots,B_n$ すべてを勝手な順番で $\vee$ でつないだ論理式とする．(たとえば $m=4$ で $A^{\wedge} \equiv (A_1{\wedge}(A_3{\wedge}A_2)){\wedge}A_4$.) すると，$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash A^{\wedge}{\leftrightarrow}B^{\wedge}$ かつ $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash A^{\vee}{\leftrightarrow}B^{\vee}$ である．

問題 8

y が A 中に現われないとき，$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash \forall xA{\leftrightarrow}\forall y(A[y/x])$，$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash \exists xA{\leftrightarrow}\exists y(A[y/x])$ を示せ．

A 中に現われない y によって $\forall xA$ を $\forall y(A[y/x])$ に，あるいは $\exists xA$ を $\exists y(A[y/x])$ に書き換えることを，**束縛変数の名前替え**と言う．定理 6 と問題 8 から次のことが言える： **論理式中の束縛変数の名前替えをしても，C_{H} での証明可能性は変化しない**（ストラクチャーにおける真偽も変化しない）．

1.4 シークエント計算

Γ, Δ が論理式の有限集合のとき

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

という表記を**シークエント**と呼ぶ．たとえば $\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A, B$ と書いたらこれは $\Gamma \cup \Delta \Rightarrow \Pi \cup \{A, B\}$ のことである．

LK は，以下の公理と推論規則でシークエントを証明する体系である．

公理：次の３種類の形のシークエント

$$A \Rightarrow A \qquad \Rightarrow \top \qquad \bot \Rightarrow$$

推論規則:

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}\ (\wedge\text{右})$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\vee\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\ (\vee\text{右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\to\text{左}) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\ (\to\text{右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\neg\text{左}) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ (\neg\text{右})$$

$$\frac{A[t/x], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\forall\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[a/x]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A}\ (\forall\text{右})^{\dagger}$$

$$\frac{A[a/x], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\exists\text{左})^{\dagger} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[t/x]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A}\ (\exists\text{右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{weakening 左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (\text{weakening 右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{cut})$$

(†) ただし ∀ と ∃ の規則は次の条件が満たされているときのみ使用可能である．

（**∀ 右,∃ 左規則の変数条件**）a は (A, Γ, Δ) 中に出現しない自由変数である．

このように,「少しの公理と,『シークエントの左辺，右辺に各結合子を導入する規則』を含む多くの規則を持ち，シークエントを単位として推論が進んでいく体系」のことを，一般にシークエント計算と呼ぶ．シークエント計算 $\mathcal{X}$ でシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明できることを

$$\mathcal{X} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$$

と書く．

LK から ∀ と ∃ に関する四つの規則（∀，∃ 各左右）を取り除いた体系を $\mathbf{LK}^{\mathrm{prop}}$ と呼ぶ．**LK**，$\mathbf{LK}^{\mathrm{prop}}$ のそれぞれから cut 規則を取り除いたシークエント計算体系のことを $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}}$，$\mathbf{LK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}}$ と書く．

（**注意**）**LK** の規則で cut だけが他と違い「前提にある論理式 (A) が，結論中には現われない場合がある」という形をしている．これは証明図を結論から公理に向けて逆に遡って分析しようとする際には厄

介な点になる．ところが，実は cut 規則がなくても証明能力が減らない（すなわち，$\mathbf{LK}$ と $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}}$ で証明できるシークエント集合は同じ，$\mathbf{LK}^{\mathrm{prop}}$ と $\mathbf{LK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}}$ で証明できるシークエント集合は同じ）ということが後で示される．

定理 9（$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$ と LK の同等性）

$$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash F \iff \mathbf{LK} \vdash \Rightarrow F.$$

(証明) ($\Longrightarrow$) $\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$ における F の証明図に関する帰納法による．たとえば規則 modus ponens に対しては「$\mathbf{LK} \vdash \Rightarrow A{\to}B$ かつ $\mathbf{LK} \vdash \Rightarrow A$ ならば $\mathbf{LK} \vdash \Rightarrow B$」を示せばよいが，これは次のようになる．

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow A{\to}B}{\Rightarrow B, A{\to}B}\,(\text{weakening 右}) \qquad \dfrac{\dfrac{\Rightarrow A}{\Rightarrow B, A}\,(\text{weakening 右}) \qquad B \Rightarrow B}{A{\to}B \Rightarrow B}\,(\to\text{左})}{\Rightarrow B}\,(\text{cut})$$

($\Longleftarrow$) 次の (†) を，$\mathbf{LK}$ における $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明図に関する帰納法で示す．

(†) $\mathbf{LK} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash (\bigwedge \Gamma){\to}(\bigvee \Delta)$

ここで，$\bigwedge \Gamma$ 等の表現の曖昧性（$\wedge$ でつなぐ順番や重複などに複数の可能性がある）は無視してよいことが問題 7 と定理 6 などから言えるので，問題にしない．すると (†) と

(‡) $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash (\bigwedge\{\}{\to}\bigvee\{F\}){\to}F$

から求める定理は証明される．(†) はたとえば $\forall$ 右規則に対しては「$\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash C{\to}(D{\vee}A[a/x])$ で a が A, C, D に現われないならば $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash C{\to}(D{\vee}\forall xA)$」を示せばよいが，これは次のようになる．ただし，必要ならば束縛変数の名前替えをすることにより，x は D に出現しないと仮定する．

$$\dfrac{\dfrac{C{\to}((D{\vee}A)[a/x])}{C{\to}\forall x(D{\vee}A)}\,(\forall) \qquad \dfrac{\text{定理 2}}{\forall x(D{\vee}A){\to}(D{\vee}\forall xA)}}{C{\to}(D{\vee}\forall xA)}\,(\text{tr.})$$

(†) の他の場合や (‡) の証明の詳細は省略（案外面倒である）． **(証明終)**

1.5 完全性

これ以後は Γ などは論理式の有限または**無限**集合を表すことにし，シークエントと言ったら左辺や右辺が無限集合であってもよいとする．$\Gamma \Rightarrow \Delta$ に対して以下の条件が成り立つとき，このシークエントは体系 $\mathcal{X}$ において証明可能であると言い $\mathcal{X} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ と書く．

Γ，Δ それぞれの適当な有限部分集合 Γ'，Δ' が存在して,（前節の意味で）$\mathcal{X} \vdash \Gamma' \Rightarrow \Delta'$.

（注意） Γ, Δ が有限集合の場合，前節での意味の「$\mathcal{X} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$」と上の定義による「$\mathcal{X} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$」とは，$\mathcal{X}$ が規則 weakening を持つので同値になる．

シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が以下のすべての条件を満たすとき，これを**飽和シークエント**と呼ぶ．

(∧ 左条件)　$A \wedge B \in \Gamma$ ならば $A \in \Gamma$ かつ $B \in \Gamma$.
(∧ 右条件)　$A \wedge B \in \Delta$ ならば $A \in \Delta$ または $B \in \Delta$.
(∨ 左条件)　$A \vee B \in \Gamma$ ならば $A \in \Gamma$ または $B \in \Gamma$.
(∨ 右条件)　$A \vee B \in \Delta$ ならば $A \in \Delta$ かつ $B \in \Delta$.
(→ 左条件)　$A \to B \in \Gamma$ ならば $A \in \Delta$ または $B \in \Gamma$.
(→ 右条件)　$A \to B \in \Delta$ ならば $A \in \Gamma$ かつ $B \in \Delta$.
(¬ 左条件)　$\neg A \in \Gamma$ ならば $A \in \Delta$.
(¬ 右条件)　$\neg A \in \Delta$ ならば $A \in \Gamma$.
(∀ 左条件)　$\forall x A \in \Gamma$ ならば，任意の項 t に対して $A[t/x] \in \Gamma$.
(∀ 右条件)　$\forall x A \in \Delta$ ならば，ある項 t に対して $A[t/x] \in \Delta$.
(∃ 左条件)　$\exists x A \in \Gamma$ ならば，ある項 t に対して $A[t/x] \in \Gamma$.
(∃ 右条件)　$\exists x A \in \Delta$ ならば，任意の項 t に対して $A[t/x] \in \Delta$.

補題 10

Γ，Δ が共に有限集合で，$\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}} \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば，$\Gamma \subseteq \Gamma^{+}$，$\Delta \subseteq \Delta^{+}$，$\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}} \nvdash \Gamma^{+} \Rightarrow \Delta^{+}$ なる飽和シークエント $\Gamma^{+} \Rightarrow \Delta^{+}$ が存在する．

(注意)「Γ，Δ が有限」という条件は，次の条件に弱めてもよい：「Γ, Δ に現われない自由変数記号が無限にある」

(証明)　すべての論理式がそれぞれ無限回出現する論理式列をひとつ作りそれを

$$F_1, F_2, \ldots$$

とする（論理式全体は可算なのでそれを $A_1, A_2, \ldots$ として，列 F_i はたとえば

$$A_1, \quad A_1, A_2, \quad A_1, A_2, A_3, \quad A_1, A_2, A_3, A_4, \quad \ldots$$

と作ればよい）．そして有限シークエントの無限列 $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$ で各 i について $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}} \nvdash \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ であるものを，i に関して帰納的に以下で定義する．

- $i = 0$ のとき．

  $$(\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0) \equiv (\Gamma \Rightarrow \Delta).$$

  これは補題の前提から $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}}$ で証明不可能である．

- $\Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}$ がすでに定義され $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}} \nvdash \Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}$ であるとき，$\Gamma_k \Rightarrow \Delta_k$ を次で定義する．
  - F_k が $A \wedge B$ という形で Γ_{k-1} に含まれるとき．

    $$(\Gamma_k \Rightarrow \Delta_k) \equiv (A, B, \Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}).$$

    ∧ 左規則があるのでこれも $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}}$ で証明不可能である．
  - F_k が $A \wedge B$ という形で Δ_{k-1} に含まれるとき．

    $$(\Gamma_k \Rightarrow \Delta_k) \equiv (\Gamma_{k-1}, \Rightarrow \Delta_{k-1}, A) \text{ または } (\Gamma_{k-1}, \Rightarrow \Delta_{k-1}, B).$$

    ∧ 右規則があるのでこれらの少なくとも一方は $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}}$ で証明不可能となる．そこで証明不可能な方を $(\Gamma_k \Rightarrow \Delta_k)$ と定義する．

– F_k が $\forall x A$ という形で Γ_{k-1} に含まれるとき．

$$(\Gamma_k \Rightarrow \Delta_k) \equiv (A[t_1/x], \ldots, A[t_n/x], \Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}).$$

ただし $A[t_1/x], \ldots, A[t_n/x]$ は,「$F_1, \ldots, F_k$ 中にあり，A 中の x を項に置き換えた形になっている論理式すべて」である．$\forall$ 左規則があるのでこれも $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}}$で証明不可能である．

– F_k が $\forall x$ という形で Δ_{k-1} に含まれるとき．

$$(\Gamma_k \Rightarrow \Delta_k) \equiv (\Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}, A[a/x]).$$

ただし a は $\Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1}$ 中に現われない自由変数である．$\forall$ 右規則があるのでこれも $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}}$ で証明不可能である．

– F_k が他の形をしている場合も同様（問題）．

そしてこの「極限」を求めるシークエントとする，すなわち

$$(\Gamma^+ \Rightarrow \Delta^+) \quad \equiv \quad ((\textstyle\bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i) \Rightarrow (\bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i)).$$

これが求める条件

$$\Gamma \subseteq \Gamma^+,\ \Delta \subseteq \Delta^+,\ \mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}} \not\vdash \Gamma^+ \Rightarrow \Delta^+,\ \text{飽和}$$

を満たすことは簡単に確認できる（問題）．　**(証明終)**

問題 11

上の証明の細部を完成させよ．つまり，$\Gamma_k \Rightarrow \Delta_k$ の定義の残りと，$\Gamma^+ \Rightarrow \Delta^+$ が求める条件を満たすことの証明を与えよ．

定理 12（$\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}}$の完全性）

$\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}} \not\vdash\ \Rightarrow F$ ならば F は恒真でない．

(証明)　$\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}} \not\vdash\ \Rightarrow F$ とする．このとき補題 10 により，$F \in \Delta^+$ であり $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}}$で証明不可能な飽和シークエント $\Gamma^+ \Rightarrow \Delta^+$ が存在する．そこでストラクチャー $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ を次のように定義する．

- 対象領域 $\mathcal{D}$ は項全体の集合．
- 定数記号の解釈は，$\mathcal{D}$ の要素としての自分自身．すなわち $\mathbf{c}^{\mathcal{I}} = \mathbf{c}$.
- n 引数述語記号 $\mathbf{p}$ の解釈は，$\mathcal{D}$ の任意の要素 $t_1, \ldots, t_n$ に対して

$$\mathbf{p}^{\mathcal{I}}(t_1, \ldots, t_n) = \mathsf{True} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma^+.$$

（特に $n = 0$ の場合は $\mathbf{p}^{\mathcal{I}} = \mathsf{True} \Longleftrightarrow \mathbf{p} \in \Gamma^+$ である.）

ここで，$\mathcal{D}$ の要素である任意の項 t に対して，その名前（$\mathcal{D}$ の名前定数拡張言語における項）を $\bar{t}$ と書くことにする．そして，拡張前の言語の文字列に対して,「自由変数をすべてその名前に置き換える」という操作を * で表す．すなわち，項 t に対しては

$$t^* \equiv \begin{cases} \bar{t} & (t \text{ が自由変数のとき}) \\ t & (t \text{ が定数記号のとき}) \end{cases}$$

であり，$(t^*)^{\mathcal{I}} = t$（項 t^* の解釈は $\mathcal{D}$ の要素としての t）が成り立つ．また X が論理式で X 中のすべての自由変数が $a_1, \ldots, a_n$ のとき，$X^* \equiv X[\overline{a_1}/a_1] \cdots [\overline{a_n}/a_n]$ であり，これは拡張言語における閉論理式である．

以上の設定のもとで，任意の論理式 X に対して次が成り立つ．

$X \in \Gamma^+$ ならば $\mathcal{M}(X^*) = \mathsf{True}$.
$X \in \Delta^+$ ならば $\mathcal{M}(X^*) = \mathsf{False}$.

これは X の長さに関する帰納法で次のように示される．

- $X \equiv \mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n)$ のとき．
  $\mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma^+ \iff \mathbf{p}^{\mathcal{I}}(t_1, \ldots, t_n) = \mathsf{True}$（$\mathcal{M}$ の定義より）
  $\iff \mathbf{p}^{\mathcal{I}}((t_1^*)^{\mathcal{I}}, \ldots, (t_n^*)^{\mathcal{I}}) = \mathsf{True}$
  $\iff \mathcal{M}(\mathbf{p}(t_1^*, \ldots, t_n^*)) = \mathsf{True}$（原子論理式の真理値の定義より）
  したがって，「$\mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma^+$ ならば $\mathcal{M}((\mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n))^*) = \mathsf{True}$」である．一方 $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}} \not\vdash \Gamma^+ \Rightarrow \Delta^+$ であったので「$\mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta^+$ ならば $\mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n) \notin \Gamma^+$」であり（なぜならシークエント $\mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow \mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n)$ は公理である），したがって「$\mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta^+$ ならば $\mathcal{M}((\mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n))^*) = \mathsf{False}$」も成り立つ．

- $X \equiv A \wedge B$ で $X \in \Gamma^+$ のとき．
  $A \wedge B \in \Gamma^+ \implies A \in \Gamma^+$ かつ $B \in \Gamma^+$（飽和性より）
  $\implies \mathcal{M}(A^*) = \mathsf{True}$ かつ $\mathcal{M}(B^*) = \mathsf{True}$（$A$，$B$ に対する帰納法の仮定より）
  $\implies \mathcal{M}((A \wedge B)^*) = \mathsf{True}$（$\wedge$ の真理値の定義）

- $X \equiv \forall x A$ で $X \in \Gamma^+$ のとき．
  $\forall x A \in \Gamma^+ \implies$ 任意の項 t に対して $A[t/x] \in \Gamma^+$（飽和性より）
  $\implies$ 任意の項 t に対して $\mathcal{M}((A[t/x])^*) = \mathsf{True}$（$A[t/x]$ に対する帰納法の仮定より）
  $\implies$ 任意の項 t に対して $\mathcal{M}(A^*[t^*/x]) = \mathsf{True}$
  $\implies$ 任意の項 t に対して $\mathcal{M}(A^*[\overline{t}/x]) = \mathsf{True}$（問題 1 より）
  $\implies \mathcal{M}(\forall x A^*) = \mathsf{True}$（$\forall$ の真理値の定義より）

- 他の場合も同様.

ところで $F \in \Delta^+$ なので，これから $\mathcal{M}(F^*) = \mathsf{False}$ であり，F は恒真でない．　**(証明終)**

定理 13（$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}$，LK の完全性，健全性，カット除去）

次の四条件は同値である．(1) $\mathbf{C}_{\mathrm{H}} \vdash F$．(2) $\mathbf{LK} \vdash \Rightarrow F$．(3) $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}} \vdash \Rightarrow F$．(4) F は恒真である．

(証明)　定理 5，9，12 による（(3)$\Longrightarrow$(2) は定義から明らか）．　**(証明終)**

（**注意**）上の定理の (2)$\Longrightarrow$(3)，あるいは一般に「$(\mathbf{LK} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta) \Longrightarrow (\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta)$」のことを，「**LK** のカット除去定理」と呼ぶ．ここでの証明は (2)$\Longrightarrow$(1)$\Longrightarrow$(4)$\Longrightarrow$(3) と恒真性を経由するものであったが，次のような手続きを与えることによって (2)$\Longrightarrow$(3) を直接示すこともできる：

LK の任意の証明図から出発して，証明図を次々に変形していき，最終的には cut を含まず結論は最初の証明図と変わらない証明図に至る．

一般にはこちらの証明方法の方が有名であり，この手続きの存在までを含めて「カット除去定理」と呼ぶこともある．

定理 13 と同様にして（あるいは定理 13 の一部分として）次も得られる．

定理 14（$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$，$\mathbf{LK}^{\mathrm{prop}}$の完全性，健全性，カット除去）

命題論理の論理式 F に関する次の四条件は同値である．(1) $\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash F$．(2) $\mathbf{LK}^{\mathrm{prop}} \vdash \Rightarrow F$．(3) $\mathbf{LK}_{-\mathrm{cut}}^{\mathrm{prop}} \vdash \Rightarrow F$．(4) F はトートロジーである．

2 様相命題論理 K

2.1 論理式

様相命題論理の論理式は，古典論理の言語に

様相記号: □，◊

を加え，次で定義される．

- 命題変数は論理式である．
- $\top$ と $\bot$ はそれぞれ論理式である．
- A，B が論理式ならば，次の四つ：$(A{\wedge}B)$，$(A{\vee}B)$，$(A{\to}B)$，$(\neg A)$ もそれぞれ論理式である．
- A が論理式ならば，次の二つ：$(\Box A)$，$(\Diamond A)$ もそれぞれ論理式である．

この章では断りのない限り A, B などは様相命題論理の論理式を指す．

□ や ◊ は ¬ と同様に優先順位が高いものとして括弧を省略する．たとえば，$\Box\ \mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \equiv ((\Box\ \mathbf{p}) \wedge \mathbf{q})$.

$\Box A$ という形の論理式を「□論理式」，$\Diamond A$ という形の論理式を「◊論理式」と呼ぶ．

様相命題論理式 A がトートロジーであるということを,「A 中の相異なる□論理式や◊論理式をすべて相異なる命題変数と見なしたときに，トートロジーになること」で定義する．正確には，次の条件を満たす $A', B_1, \ldots, B_k, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ が存在するとき A はトートロジーであると言う．

- A' は様相記号を含まない命題論理式で，1.2 節の意味でトートロジーである．
- $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ は相異なる命題変数で，$A \equiv A'[\vec{B}/\vec{\mathbf{p}}]$.（ただし，$[\vec{B}/\vec{\mathbf{p}}]$ は $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ にそれぞれ論理式 $B_1 \ldots, B_k$ を同時代入することを表す）

例：$\Box\mathbf{p}{\vee}\neg\Box\mathbf{p}$ はトートロジーであり，$\Box(\mathbf{p}{\vee}\neg\mathbf{p})$ や $\Box(\mathbf{p}{\wedge}\mathbf{q}){\vee}\neg\Box(\mathbf{q}{\wedge}\mathbf{p})$ や $\Diamond\mathbf{p}{\to}\neg\Box\neg\mathbf{p}$ はトートロジーでない．

A がトートロジーであることを

$\models_{\mathrm{taut}} A$

と書き，また $A_1{\to}(A_2{\to}\cdots{\to}(A_n{\to}B)\cdots)$ がトートロジーであることを

$A_1, \ldots, A_n \models_{\mathrm{taut}} B$

とも書く.

2.2 クリプキフレーム，クリプキモデル

空でない集合 W と，W 上の 2 項関係 $\rightsquigarrow$ の組 $\langle W, \rightsquigarrow \rangle$ を**クリプキフレーム**，または単に**フレーム**と呼ぶ．W をこのフレームの**可能世界集合**（W の各要素を**可能世界**），$\rightsquigarrow$ を **到達可能関係**と呼ぶ．フレームに**解釈** $\mathcal{I}$ を付けた組 $\langle W, \rightsquigarrow, \mathcal{I} \rangle$ を**クリプキモデル**と呼ぶ．ただし解釈とは各可能世界における各命題変数の真偽を決めたものであり，解釈 $\mathcal{I}$ による命題変数 $\mathbf{p}$ の可能世界 $w \in W$ における真理値（True か False）を

$\mathbf{p}_w^{\mathcal{I}}$

と書く.

クリプキモデル $\mathcal{M} = \langle W, \rightsquigarrow, \mathcal{I} \rangle$ において,「可能世界 $w \in W$ における論理式 X の真理値」を $\mathcal{M}(w, X)$ と書く．これは次のように X の構成に関して再帰的に定義される.

$\mathcal{M}(w, \mathbf{p}) = \mathbf{p}_w^{\mathcal{I}}$.

$\mathcal{M}(w, \top) =$ True.

$\mathcal{M}(w, \bot) =$ False.

$\mathcal{M}(w, A{\wedge}B) =$ True $\iff$ $\mathcal{M}(w, A) =$ True かつ $\mathcal{M}(w, B) =$ True.

$\mathcal{M}(w, A{\vee}B) =$ True $\iff$ $\mathcal{M}(w, A) =$ True または $\mathcal{M}(w, B) =$ True.

$\mathcal{M}(w, A{\to}B) =$ True $\iff$ $\mathcal{M}(w, A) =$ False または $\mathcal{M}(w, B) =$ True.

$\mathcal{M}(w, \neg A) =$ True $\iff$ $\mathcal{M}(w, A) =$ False.

$\mathcal{M}(w, \Box A) =$ True $\iff$ $w \rightsquigarrow x$ となるすべての $x \in W$ に対して $\mathcal{M}(x, A) =$ True.

$\mathcal{M}(w, \Diamond A) =$ True $\iff$ $w \rightsquigarrow x$ となるある $x \in W$ に対して $\mathcal{M}(x, A) =$ True.

問題 15

様相命題論理式 A がトートロジーならば，どんなクリプキモデル $\mathcal{M} = \langle W, \rightsquigarrow, V \rangle$ のどんな可能世界 $w \in W$ においても $\mathcal{M}(w, A) =$ True となることを示せ.

A を論理式，$\mathcal{F} = \langle W, \rightsquigarrow \rangle$ をフレームとする.「フレーム $\mathcal{F}$ に解釈を任意に付けたクリプキモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle$ の任意の可能世界 $w \in W$ で $\mathcal{M}(w, A) =$ True」となるとき,「A はフレーム $\mathcal{F}$ で恒真」と言い

$\mathcal{F} \models A$

と書く．X がフレームのある集まりのとき,「すべての $\mathcal{F} \in \mathsf{X}$ に対して $\mathcal{F} \models A$」であることを「A はフレームのクラス X で恒真」と言い

$\mathsf{X} \models A$

と書く.

2.3 ヒルベルト流体系

1.3 節の $\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$の公理と規則（古典命題論理のヒルベルト流体系）に次の公理と規則を加えた体系を $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$と呼ぶ.

公理： $\Box(A{\to}B) \to (\Box A{\to}\Box B)$，$\Diamond A{\leftrightarrow}\neg\Box\neg A$.

規則： $\dfrac{A}{\Box A}$ (necessitation)

（**注意**）1.3 節での論理式は様相記号を含まない述語論理式であったが，ここで「$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$の公理と規則」と言ったらそれらの形に当てはまるすべての様相命題論理式を指す.

すべてのフレームの集まりを K と書く.

定理 16（$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$の健全性）

$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash F$ ならば $\mathsf{K} \models F$.

(証明) $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash F$ の証明に関する帰納法による. **(証明終)**

定理 17

(1) $\models_{\mathrm{taut}} F$ ならば $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash F$.

(2) $A_1, \ldots, A_n \models_{\mathrm{taut}} B$ ならば $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$において $A_1 \ldots, A_n$ から B を導くことができる.

(証明) **(1)** F がトートロジーならば次を満たす $F', B_1, \ldots, B_k, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ が存在する.

- F' は様相記号を含まない命題論理式で，1.2 節の意味でトートロジーである.
- $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ は相異なる命題変数で，$F \equiv F'[\vec{B}/\vec{\mathbf{p}}]$.

ところで,

$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash A$ ならば $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash A[\vec{B}/\vec{\mathbf{p}}]$

が $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash A$ の証明図に関する帰納法で簡単に示されるので，これらと定理 14 から $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash F$ は言える.

(2) (1) と規則 modus ponens を使えばよい. **(証明終)**

上記のことから，$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$および $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$を拡張した体系において次の規則が使用可能であることが言える.

$$\frac{A_1 \quad \cdots \quad A_n}{B}\ (\mathrm{taut})\ (A_1, \ldots, A_n \models_{\mathrm{taut}} B \text{ のとき})$$

以後，この規則も適宜使用する.

定理 18

$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash (A_1{\wedge}A_2{\wedge}\cdots{\wedge}A_n){\to}B$ ならば $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash (\Box A_1{\wedge}\Box A_2{\wedge}\cdots{\wedge}\Box A_n){\to}\Box B$ である．したがって $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$および $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$を拡張した体系において次の規則が使用可能である.

$$\frac{(A_1{\wedge}A_1{\wedge}\cdots{\wedge}A_n){\to}B}{(\Box A_1{\wedge}\Box A_2{\wedge}\cdots{\wedge}\Box A_n){\to}\Box B}\ (\Box)$$

(証明)　たとえば $n=2$ の場合，

$$
\dfrac{
 \dfrac{
  \dfrac{
   \dfrac{(A_1\wedge A_2)\to B}{A_1\to(A_2\to B)}\,(\text{taut})
  }{\Box(A_1\to(A_2\to B))}\,(\text{nec})
  \quad
  \dfrac{\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}\text{の公理}}{\Box(A_1\to(A_2\to B))\to(\Box A_1\to\Box(A_2\to B))}
 }{\Box A_1\to\Box(A_2\to B)}\,(\text{taut})
 \quad
 \dfrac{\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}\text{の公理}}{\Box(A_2\to B)\to(\Box A_2\to\Box B)}
}{\dfrac{\Box A_1\to(\Box A_2\to\Box B)}{(\Box A_1\wedge\Box A_2)\to\Box B}\,(\text{taut})}\,(\text{taut})
$$

(証明終)

問題 19

定理 6 の $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$版である次を示せ．$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash A\leftrightarrow B$ ならば $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash F[A/\mathbf{p}]\leftrightarrow F[B/\mathbf{p}]$ である．

これによって，たとえば論理式中の $A\wedge B$ を $A\wedge(\top\wedge B)$ に置き換えたり，$\Diamond A$ を $\neg\Box\neg A$ に置き換えたりしても証明可能性は変わらない（モデルの各可能世界における真理値も変わらない）ことが言えるので，以後このような置き換えは自由に行うことにする．また，$\bigwedge\Gamma$ といった表記は Γ の要素の順番や重複に任意性があるが，それも気にしなくてよいことになる．

問題 20

$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$および $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$を拡張した体系において次の各規則が使用可能であることを示せ．

$$
\dfrac{Z}{C\to(D\vee\Box Z)} \qquad \dfrac{Y\to Z}{(C\to(D\vee\Box Y))\to(C\to(D\vee\Box Z))}
$$

$$
\dfrac{(X\wedge Y)\to Z}{\Big((C\to(D\vee\Box X))\wedge(C\to(D\vee\Box Y))\Big)\to(C\to(D\vee\Box Z))}
$$

2.4　ツリーシークエント計算

様相論理に対するシークエント計算の体系として「**LK** のシークエントが樹状につながったもの」を単位として証明をするものを作る．

自然数の有限列（空列も含む）を**ラベル**と呼ぶ．ラベルをたとえば $\langle 3,7,3,2\rangle$ のように角括弧とカンマを用いて表記する．したがって空列は $\langle\rangle$ である．以後 α，β などでラベルを表す．ふたつのラベル α，β がある自然数 $n_1,\ldots,n_k$（$k\geq 1$）に対して $\alpha\equiv\langle n_1,n_2,\ldots n_{k-1}\rangle$，$\beta\equiv\langle n_1,n_2,\ldots n_{k-1},n_k\rangle$ であるとき（すなわち，β は α をひとつ延ばしたものであるとき），「α は β の**親**である」「β は α の**子**である」と言う．空列以外のラベルにはそれぞれ唯一の親が存在する．ラベルの集合 $\mathcal{L}$ が以下の条件を満たすとき，$\mathcal{L}$ は**木**と呼ばれる．

$\mathcal{L}$ に含まれる空列以外のどんなラベルも，その親がまた $\mathcal{L}$ に含まれる．

木 $\mathcal{L}$ の要素で，その子が $\mathcal{L}$ 内に存在しないようなものは**葉**と呼ばれる．空集合以外の木は必ず空列を含んでいるが，その空列を木の**根**と呼ぶ．

α がラベルで A が論理式であるとき，

$$\alpha : A$$

という表現を**ラベル付き論理式**と呼ぶ．$\varGamma$ と $\varDelta$ がラベル付き論理式の有限集合，$\mathcal{L}$ がラベルの有限集合で，条件：

　　$\mathcal{L}$ は木であり，$\varGamma, \varDelta$ 中のどんなラベルも $\mathcal{L}$ に含まれる

を満たすとき，

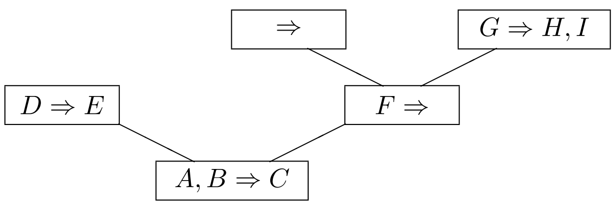
$$\varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta$$

という表現を**ツリーシークエント**と呼ぶ．

（**注意**）たとえばツリーシークエント

$$\langle\rangle : A,\ \langle\rangle : B,\ \langle 1\rangle : D,\ \langle 2\rangle : F,\ \langle 2,2\rangle : G \stackrel{\{\langle\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : C,\ \langle 1\rangle : E,\ \langle 2,2\rangle : H,\ \langle 2,2\rangle : I$$

は，



を表していると考える．ここでは正確な議論をコンパクトに記述するために，後者の樹状表現でなくラベルを用いた表現を使っている．

$\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}$は，以下の公理と推論規則でツリーシークエントを証明する体系である．

　　公理：次の３種類の形のツリーシークエント

$$\alpha : A \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \alpha : A \qquad \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \alpha : \top \qquad \alpha : \bot \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow}$$

　　推論規則：

$$\frac{\alpha : A,\ \alpha : B,\ \varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta}{\alpha : A{\wedge}B,\ \varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta}\ (\wedge\text{左}) \qquad \frac{\varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta,\ \alpha : A \qquad \varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta,\ \alpha : B}{\varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta,\ \alpha : A{\wedge}B}\ (\wedge\text{右})$$

$$\frac{\alpha : A,\ \varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta \qquad \alpha : B,\ \varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta}{\alpha : A{\vee}B,\ \varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta}\ (\vee\text{左}) \qquad \frac{\varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta,\ \alpha : A,\ \alpha : B}{\varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta,\ \alpha : A{\vee}B}\ (\vee\text{右})$$

$$\frac{\varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta,\ \alpha : A \qquad \alpha : B,\ \varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta}{\alpha : A{\to}B,\ \varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta}\ (\to\text{左}) \qquad \frac{\alpha : A,\ \varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta,\ \alpha : B}{\varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta,\ \alpha : A{\to}B}\ (\to\text{右})$$

$$\frac{\varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta,\ \alpha : A}{\alpha : \neg A,\ \varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta}\ (\neg\text{左}) \qquad \frac{\alpha : A,\ \varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta}{\varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta,\ \alpha : \neg A}\ (\neg\text{右})$$

$$\frac{\beta : A,\ \varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta}{\alpha : \Box A,\ \varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta}\ (\Box\text{左})^{\dagger} \qquad \frac{\varGamma \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \varDelta,\ \beta : A}{\varGamma \stackrel{\mathcal{L}-\{\beta\}}{\Rightarrow} \varDelta,\ \alpha : \Box A}\ (\Box\text{右})^{\ddagger}$$

$$\frac{\beta : A,\ \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta}{\alpha : \Diamond A,\ \Gamma \overset{\mathcal{L}-\{\beta\}}{\Rightarrow} \Delta}\ (\Diamond左)^{\ddagger} \qquad \frac{\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta,\ \beta : A}{\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta,\ \alpha : \Diamond A}\ (\Diamond右)^{\dagger}$$

$$\frac{\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta}{\alpha : A,\ \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta}\ (\text{weakening 左}) \qquad \frac{\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta}{\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta,\ \alpha : A}\ (\text{weakening 右})$$

$$\frac{\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta}{\Gamma \overset{\mathcal{L}\cup\{\alpha\}}{\Rightarrow} \Delta}\ (\text{weakening ラベル})$$

$$\frac{\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta,\ \alpha : A \quad \alpha : A, \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta}{\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta}\ (\text{cut})$$

ただし $\Box$ と $\Diamond$ の規則は次の条件が満たされているときのみ使用可能である．

(†)（**$\Box$ 左,$\Diamond$ 右規則のラベル条件**）α は β の親である．

(‡)（**$\Box$ 右,$\Diamond$ 左規則のラベル条件**）α は β の親であり，かつ β は $\mathcal{L}$ 内の葉であって Γ, Δ 中には現われない．

また weakening 規則においては，結論がツリーシークエントになるために当然次のような条件が必要である：（weakening 左右）においては，$\alpha \in \mathcal{L}$.（weakening ラベル）においては，$\mathcal{L} \cup \{\alpha\}$ は木．

$\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}$から cut 規則を取り除いた体系を $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}}$と呼ぶ．

ツリーシークエントの論理式への翻訳を与える．まず，ラベル付き論理式の集合 Γ とラベル α に対して,「Γ 中でラベル α が付いている論理式の集合」を Γ_α と表記する．すなわち，

$$\Gamma_\alpha \ = \ \{A \mid \alpha : A \in \Gamma\}$$

である．そして，ツリーシークエント $\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ とラベル α に対して，論理式 $[\![\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta]\!]_\alpha$ を次の形の論理式として再帰的に定義する．

$$[\![\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta]\!]_\alpha \quad \equiv \quad \bigwedge(\Gamma_\alpha) \to \bigvee\Big(\Delta_\alpha,\ \Box[\![\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta]\!]_{\beta_1}, \ldots, \Box[\![\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta]\!]_{\beta_k}\Big)$$

ただし，$\beta_1, \ldots, \beta_k$ は α の子で $\mathcal{L}$ 中に存在するものすべてである．

（**注意**）$\mathcal{L}$ は有限集合であるので，どんなラベルも $\mathcal{L}$ 中では有限個の子しか持たず，さらに $\mathcal{L}$ 中で子の方向へ進んで行く道は必ず有限の長さで葉に至って終了するので，上の再帰的な式は有限の長さの論理式を表している．また，$\bigwedge$ や $\bigvee$ における要素の重複や順番の任意性からこの式では論理式 $[\![\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta]\!]_\alpha$ が必ずしも一意には定まらないが，この任意性は，モデルにおける真理値に関しても，$\mathbf{K}^{\mathrm{prop}}_{\mathrm{H}}$における証明可能性に関しても問題にならないことが，問題 19 やその後の注意から言える．

例

15 ページの樹状に表現されたツリーシークエントを $\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ とすると，以下の論理式は $[\![\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta]\!]_{\langle\rangle}$ である．

$$\Big(A{\wedge}B\Big) \to \Big(C \vee \Box\Big(D{\to}E\Big) \vee \Box\Big(F{\to}(\Box\bot \vee \Box(G{\to}H{\vee}I))\Big)\Big)$$

ただし,「$\top{\to}\bot$ を $\bot$ に替える」等の処理により簡潔にしてある．

定理 21（$\mathbf{K}^{\mathrm{prop}}_{\mathrm{H}}$と $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}$の同等性）

$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash F \iff \mathbf{TK}^{\mathrm{prop}} \vdash \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : F$ （「左辺は空，右辺は F だけのシークエント」を根とし，それ以外のノードは無いツリーシークエント）．

(証明)

($\Longrightarrow$)　$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash F$ の証明図に関する帰納法による．たとえば公理 $\Box(A{\to}B) \to (\Box A{\to}\Box B)$ に対しては次のように証明できる．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle1\rangle : A \overset{\{\langle\rangle,\langle1\rangle\}}{\Rightarrow} \langle1\rangle : A}{\langle1\rangle : A \overset{\{\langle\rangle,\langle1\rangle\}}{\Rightarrow} \langle1\rangle : B,\ \langle1\rangle : A}\,(\text{we. 右}) \quad \dfrac{\langle1\rangle : B \overset{\{\langle\rangle,\langle1\rangle\}}{\Rightarrow} \langle1\rangle : B}{\langle1\rangle : B,\ \langle1\rangle : A \overset{\{\langle\rangle,\langle1\rangle\}}{\Rightarrow} \langle1\rangle : B}\,(\text{we. 左})}{\langle1\rangle : A{\to}B,\ \langle1\rangle : A \overset{\{\langle\rangle,\langle1\rangle\}}{\Rightarrow} \langle1\rangle : B}\,(\to\text{左})}{\langle\rangle : \Box(A{\to}B),\ \langle1\rangle : A \overset{\{\langle\rangle,\langle1\rangle\}}{\Rightarrow} \langle1\rangle : B}\,(\Box\text{左})}{\langle\rangle : \Box(A{\to}B),\ \langle\rangle : \Box A \overset{\{\langle\rangle,\langle1\rangle\}}{\Rightarrow} \langle1\rangle : B}\,(\Box\text{左})}{\langle\rangle : \Box(A{\to}B),\ \langle\rangle : \Box A \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : \Box B}\,(\Box\text{右})}{\overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : \Box(A{\to}B){\to}(\Box A{\to}\Box B)}\,(\to\text{右})
$$

また，necessitation 規則については「$\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}$が necessitation 規則に関して閉じている」ことをあらかじめ示しておく必要がある（後の問題）．

($\Longleftarrow$)　「$\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}} \vdash \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ ならば $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash [\![\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta]\!]_{\langle\rangle}$」を $\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ の証明図に関する帰納法で示す．$\Box$ や $\Diamond$ の規則以外については，その公理や規則で着目した論理式のラベルの長さ（根からの距離）の回数だけ問題 20 の規則を使うことによって簡単に示される．$\Box$ 左と $\Diamond$ 右規則については，

$$
\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash \Box((A{\wedge}C){\to}D) \to (\Box A{\to}\Box(C{\to}D)),\ \ \mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash \Box(C{\to}(D{\vee}A)) \to (\Box(C{\to}D){\vee}\Diamond A)
$$

と問題 20 の規則などから示される．$\Box$ 右と $\Diamond$ 左規則については，$[\![\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta]\!]_{\langle\rangle}$ の定義と問題 20 の規則などから示される．　**(証明終)**

問題 22

$\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}} \vdash \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : F$ ならば $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}} \vdash \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : \Box F$ であることを証明せよ．ヒント:「$\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}} \vdash \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : F$ ならば $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}} \vdash \overset{\{\langle\rangle,\langle1\rangle\}}{\Rightarrow} \langle1\rangle : F$」が言えればよい．そこで，これを一般化した命題を帰納法で示せばよい．

2.5　完全性

これ以後は $\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ と書いたときには Γ, $\mathcal{L}$, Δ などは無限集合でもよいことにする．そのようなものを無限ツリーシークエントと呼ぶ．ただし体系 $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}$内で証明の対象として扱えるのは有限ツリーシークエントだけである．1.5 章での定義と同様に，無限ツリーシークエントが体系 $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}$で証明可能でるとは，そのある有限部分が証明可能であることとして定義する．

ツリーシークエント $\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ が以下のすべての条件を満たすとき，これを**飽和ツリーシークエント**と呼ぶ．

（$\wedge$ 左条件）　$\alpha : A{\wedge}B \in \Gamma$ ならば $\alpha : A \in \Gamma$ かつ $\alpha : B \in \Gamma$.

（$\wedge$ 右条件）　$\alpha : A{\wedge}B \in \Delta$ ならば $\alpha : A \in \Delta$ または $\alpha : B \in \Delta$.

（$\vee$ 左条件）　$\alpha : A{\vee}B \in \Gamma$ ならば $\alpha : A \in \Gamma$ または $\alpha : B \in \Gamma$.

(∨ 右条件)　$\alpha : A \vee B \in \Delta$ ならば $\alpha : A \in \Delta$ かつ $\alpha : B \in \Delta$.
(→ 左条件)　$\alpha : A \to B \in \Gamma$ ならば $\alpha : A \in \Delta$ または $\alpha : B \in \Gamma$.
(→ 右条件)　$\alpha : A \to B \in \Delta$ ならば $\alpha : A \in \Gamma$ かつ $\alpha : B \in \Delta$.
(¬ 左条件)　$\alpha : \neg A \in \Gamma$ ならば $\alpha : A \in \Delta$.
(¬ 右条件)　$\alpha : \neg A \in \Delta$ ならば $\alpha : A \in \Gamma$.
(□ 左条件)　$\alpha : \Box A \in \Gamma$ ならば，$\mathcal{L}$ 内の α の任意の子 β に対して $\beta : A \in \Gamma$.
(□ 右条件)　$\alpha : \Box A \in \Delta$ ならば，$\mathcal{L}$ 内の α のある子 β に対して $\beta : A \in \Delta$.
(◊ 左条件)　$\alpha : \Diamond A \in \Gamma$ ならば，$\mathcal{L}$ 内の α のある子 β に対して $\beta : A \in \Gamma$.
(◊ 右条件)　$\alpha : \Diamond A \in \Delta$ ならば，$\mathcal{L}$ 内の α の任意の子 β に対して $\beta : A \in \Delta$.

補題 23

$\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ が有限ツリーシークエントで $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}} \nvdash \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ ならば，$\Gamma \subseteq \Gamma^+$，$\Delta \subseteq \Delta^+$，$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$，$\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}} \nvdash \Gamma^+ \overset{\mathcal{L}^+}{\Rightarrow} \Delta^+$ なる飽和ツリーシークエント $\Gamma^+ \overset{\mathcal{L}^+}{\Rightarrow} \Delta^+$ が存在する．

(証明)　補題 10 と同様に，すべてのラベル付き論理式がそれぞれ無限回出現する列をひとつ作りそれを

$$\lambda_1 : F_1,\ \lambda_2 : F_2,\ \ldots$$

とする（ラベル付き論理式全体も可算なのでこのようなことができる）．そして有限ツリーシークエントの無限列 $\Gamma_i \overset{\mathcal{L}_i}{\Rightarrow} \Delta_i\ (i = 0, 1, \ldots)$ で各 i について $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}} \nvdash \Gamma_i \overset{\mathcal{L}_i}{\Rightarrow} \Delta_i$ であるものを，i に関して帰納的に以下で定義する．

- $i = 0$ のとき．

$$(\Gamma_0 \overset{\mathcal{L}_0}{\Rightarrow} \Delta_0) \quad \equiv \quad (\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta).$$

  これは補題の前提から $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}}$ で証明不可能である．

- $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}}$ で証明不可能な $\Gamma_{k-1} \overset{\mathcal{L}_{k-1}}{\Rightarrow} \Delta_{k-1}$ がすでに定義されているとき，$\Gamma_k \overset{\mathcal{L}_k}{\Rightarrow} \Delta_k$ を次で定義する．

  - $\lambda_k : F_k$ が $\lambda_k : A \wedge B$ という形で Γ_{k-1} に含まれるとき．

$$(\Gamma_k \overset{\mathcal{L}_k}{\Rightarrow} \Delta_k) \quad \equiv \quad (\lambda_k : A,\ \lambda_k : B,\ \Gamma_{k-1} \overset{\mathcal{L}_{k-1}}{\Rightarrow} \Delta_{k-1}).$$

    ∧ 左規則があるのでこれも $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}}$ で証明不可能である．

  - $\lambda_k : F_k$ が $\lambda_k : A \wedge B$ という形で Δ_{k-1} に含まれるとき．

$$(\Gamma_k \overset{\mathcal{L}_k}{\Rightarrow} \Delta_k) \quad \equiv \quad \begin{cases} \Gamma_{k-1} \overset{\mathcal{L}_{k-1}}{\Rightarrow} \Delta_{k-1},\ \lambda_k : A \\ \text{または} \\ \Gamma_{k-1} \overset{\mathcal{L}_{k-1}}{\Rightarrow} \Delta_{k-1},\ \lambda_k : B \end{cases}$$

    ∧ 右規則があるのでこれらの少なくとも一方は $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}}$ で証明不可能となる．そこで証明不可能な方を $(\Gamma_k \overset{\mathcal{L}_k}{\Rightarrow} \Delta_k)$ と定義する．

  - $\lambda_k : F_k$ が $\lambda_k : \Box A$ という形で Γ_{k-1} に含まれるとき．

$$(\Gamma_k \overset{\mathcal{L}_k}{\Rightarrow} \Delta_k) \quad \equiv \quad (\beta_1 : A, \ldots, \beta_n : A,\ \Gamma_{k-1} \overset{\mathcal{L}_{k-1}}{\Rightarrow} \Delta_{k-1}).$$

    ただし $\beta_1, \ldots, \beta_n$ は,「$\mathcal{L}_{k-1}$ 中にある λ_k のすべての子」である．□ 左規則があるのでこれも $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}}$ で証明不可能である．

- $\lambda_k : F_k$ が $\lambda_k : \Box A$ という形で Δ_{k-1} に含まれるとき．

$$(\Gamma_k \overset{\mathcal{L}_k}{\Rightarrow} \Delta_k) \quad \equiv \quad (\Gamma_{k-1} \overset{\mathcal{L}_{k-1}\cup\{\beta\}}{\Rightarrow} \Delta_{k-1},\ \beta : A).$$

ただし β は λ_k の子で $\mathcal{L}_{k-1}$ には含まれないもの（すなわち λ_k の「新しい子」）である．□右規則があるのでこれも $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}}$ で証明不可能である．

- $\lambda_k : F_k$ が他の形をしている場合も同様（問題）．

そしてこの「極限」を求めるツリーシークエントとする，すなわち

$$(\Gamma^+ \overset{\mathcal{L}^+}{\Rightarrow} \Delta^+) \quad \equiv \quad ((\textstyle\bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i) \overset{\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathcal{L}}{\Rightarrow} (\bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i)).$$

これが求める条件

$$\Gamma \subseteq \Gamma^+,\ \Delta \subseteq \Delta^+,\ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+,\ \mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}} \nvdash \Gamma^+ \overset{\mathcal{L}^+}{\Rightarrow} \Delta^+,\ \text{飽和}$$

を満たすことは簡単に確認できる（問題）． **(証明終)**

問題 24

上の証明の細部を完成させよ．つまり，$\Gamma_k \overset{\mathcal{L}_k}{\Rightarrow} \Delta_k$ の定義の残りと，$\Gamma^+ \overset{\mathcal{L}^+}{\Rightarrow} \Delta^+$ が求める条件を満たすことの証明を与えよ．

定理 25（$\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}}$ の完全性）

左辺が空で右辺がひとつのラベル付き論理式からなる有限ツリーシークエント $(\overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \lambda : F)$ が $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}}$ で証明不可能ならば，あるクリプキモデルのある可能世界でその右辺の論理式 F が False になる．

(証明) $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}} \nvdash \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \lambda : F$ とする．このとき補題 23 により，$(\lambda : F) \in \Delta^+$ であり $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}}$ で証明不可能な飽和ツリーシークエント $\Gamma^+ \overset{\mathcal{L}^+}{\Rightarrow} \Delta^+$ が存在する．そこでクリプキモデル $\mathcal{M} = \langle W, \rightsquigarrow, \mathcal{I}\rangle$ を次のように定義する．

- $W = \mathcal{L}^+$ （つまりラベルを可能世界とする）．
- $\rightsquigarrow$ は $\mathcal{L}^+$ 上の「親子関係」，すなわち，$\alpha \rightsquigarrow \beta \iff$ 「α は β の親である」．
- $\mathbf{p}^{\mathcal{I}}_{\alpha} = \mathsf{True} \iff (\alpha : \mathbf{p}) \in \Gamma^+$．

すると任意のラベル付き論理式 $\alpha : X$ に対して次が成り立つ．

$(\alpha : X) \in \Gamma^+$ ならば $\mathcal{M}(\alpha, X) = \mathsf{True}$.
$(\alpha : X) \in \Delta^+$ ならば $\mathcal{M}(\alpha, X) = \mathsf{False}$.

これは X の長さに関する帰納法で次のように示される．

- $X \equiv \mathbf{p}$ で $(\alpha : X) \in \Delta^+$ のとき．$\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}} \nvdash \Gamma^+ \overset{\mathcal{L}^+}{\Rightarrow} \Delta^+$ なので，$(\alpha : \mathbf{p}) \notin \Gamma^+$ でなければならない（なぜなら，α を含む適当な有限木 $\{\alpha\}^* \subseteq \mathcal{L}^+$ をとると，$\alpha : \mathbf{p} \overset{\{\alpha\}^*}{\Rightarrow} \alpha : \mathbf{p}$ は公理になるので）．したがって $\mathcal{I}$ の定義から $\mathcal{M}(\alpha, \mathbf{p}) = \mathsf{False}$ になる．

- $X \equiv A \wedge B$ で $(\alpha : X) \in \Gamma^+$ のとき．

$$\begin{aligned}(\alpha : A\wedge B) \in \Gamma^+ &\implies (\alpha : A) \in \Gamma^+ \text{ かつ } (\alpha : B) \in \Gamma^+ && \text{（飽和性より）}\\ &\implies \mathcal{M}(\alpha, A) = \mathsf{True} \text{ かつ } \mathcal{M}(\alpha, B) = \mathsf{True} && \text{（}A\text{，}B\text{ に対する帰納法の仮定より）}\\ &\implies \mathcal{M}(\alpha, A\wedge B) = \mathsf{True} && \text{（}\wedge\text{ の真理値の定義）}\end{aligned}$$

- $X \equiv \Box A$ で $(\alpha : X) \in \Gamma^+$ のとき．
  $\Box A \in \Gamma^+ \implies \mathcal{L}^+$ 中の α の任意の子 β に対して $(\beta : A) \in \Gamma^+$ （飽和性より）
  $\implies \mathcal{L}^+$ 中の α の任意の子 β に対して $\mathcal{M}(\beta, A) = \mathsf{True}$ （A に対する帰納法の仮定より）
  $\implies \mathcal{M}(\alpha, \Box A) = \mathsf{True}$ （$\Box$ の真理値の定義より）
- 他の場合も同様．

ところで $(\lambda : F) \in \Delta^+$ なので，これから $\mathcal{M}(\lambda, F) = \mathsf{False}$ である． **(証明終)**

定理 26（$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$，$\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}$の完全性，健全性，カット除去）

次の四条件は同値である．(1) $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash F$. (2) $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}} \vdash \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : F$. (3) $\mathbf{TK}_{-\mathrm{cut}}^{\mathrm{prop}} \vdash \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : F$.
(4) $\mathsf{K} \models F$.

(証明) 定理 16，21，25 による（(3)$\Longrightarrow$(2) は定義から明らか）． **(証明終)**

3 様相命題論理 S4，S5

3.1 フレーム

様相命題論理 **S4**，**S5** の論理式は，前章の様相命題論理 **K** のものと変わらない．

すべてのフレームの集まりが K であったが,「すべての，推移的かつ反射的フレームの集まり」を S4 と書く.「すべての，推移的かつ反射的かつ対称的（つまり同値関係）フレームの集まり」を S5 と書く．ただしフレーム $\langle W, \rightsquigarrow\rangle$ が推移的，反射的，対称的であるとは，次の条件である．

推移的：$\forall x, y, z \in W[$（$x \rightsquigarrow y$ かつ $y \rightsquigarrow z$）ならば $x \rightsquigarrow z]$
反射的：$\forall x \in W[x \rightsquigarrow x]$
対称的：$\forall x, y \in W[x \rightsquigarrow y$ ならば $y \rightsquigarrow x]$

3.2 ヒルベルト流体系

前章の $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$ に次の公理を加えた体系を $\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$ と呼ぶ．

$\Box A \to \Box\Box A$，$\Box A \to A$.

定理 27（$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$の健全性）

$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash F$ ならば $\mathsf{S4} \models F$.

(証明) $\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash F$ の証明に関する帰納法による． **(証明終)**

$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$ にさらに次の公理を加えた体系を $\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$ と呼ぶ．

$A \to \Box\Diamond A$.

定理 28（$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$ の健全性）

$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash F$ ならば S5 $\models F$.

(証明)　$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash F$ の証明に関する帰納法による．　**(証明終)**

3.3　ツリーシークエント計算

ラベル間の「親である」という関係の推移反射閉包を $\preceq$ と表す．すなわち，

$$\alpha \preceq \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \exists m \geq 0, \exists n \geq 0, \exists a_1, \ldots, \exists a_m, \exists b_1, \ldots, \exists b_n \\ [\alpha = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle \text{ かつ } \beta = \langle a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \rangle] \end{array}$$

とする．

前章のツリーシークエント計算の体系 $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}$ の □ 左規則，◊ 右規則のラベル条件を以下のように緩めた（規則としては適用範囲が広くなる）体系を $\mathbf{TS4}^{\mathrm{prop}}$ と呼ぶ．

(†)（**□ 左,◊ 右規則のラベル条件**）$\alpha \preceq \beta$.

$\mathbf{TS4}^{\mathrm{prop}}$ から cut 規則を取り除いた体系を $\mathbf{TS4}_{-\mathrm{cut}}^{\mathrm{prop}}$ と呼ぶ．

定理 29（$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$ と $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}$ の同等性）

$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash F \iff \mathbf{TS4}^{\mathrm{prop}} \vdash \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : F$.

(証明)

$(\Longrightarrow)$　$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash F$ の証明図に関する帰納法による．$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$ の部分はすでに定理 21 でやっている．たとえば公理 $\Box A {\to} \Box\Box A$ は次のように証明できる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,1\rangle : A \overset{\{\langle\rangle,\langle 1\rangle,\langle 1,1\rangle\}}{\Rightarrow} \langle 1,1\rangle : A}{\langle\rangle : \Box A \overset{\{\langle\rangle,\langle 1\rangle,\langle 1,1\rangle\}}{\Rightarrow} \langle 1,1\rangle : A}\,(\Box 左)}{\langle\rangle : \Box A \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : \Box\Box A}\,(\Box 右)}{\overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : \Box A {\to} \Box\Box A}\,({\to}右)$$

$(\Longleftarrow)$　「$\mathbf{TS4}^{\mathrm{prop}} \vdash \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ ならば $\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash [\![\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta]\!]_{\langle\rangle}$」を $\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ の証明図に関する帰納法で示す．□ 左，◊ 右の規則以外については定理 21 でやっている．□ 左，◊ 右については，定理 21 での議論に次を加えることで示される：任意の $n \geq 0$ について，

$$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash ((\Box^n A {\wedge} X){\to}Y) \to ((\Box A {\wedge} X){\to}Y),$$
$$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash (Y {\vee} \Diamond^n A) \to (Y {\vee} \Diamond A).$$

ただし $\Box^n A$，$\Diamond^n A$ は A の前にそれぞれ n 個の □，n 個の ◊ を付けた論理式である．　**(証明終)**

ツリーシークエント計算の体系 $\mathbf{TK}^{\mathrm{prop}}$や $\mathbf{TS4}^{\mathrm{prop}}$の $\Box$ と $\Diamond$ の規則のラベル条件から「親である」「子である」「$\preceq$」「葉である」などをすべて削除した（規則の適用範囲が広くなる）体系を $\mathbf{TS5}^{\mathrm{prop}}$と呼ぶ. すなわち，$\mathbf{TS5}^{\mathrm{prop}}$の様相記号に関する規則は以下のようになる.

$$\frac{\beta : A,\ \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta}{\alpha : \Box A,\ \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta}\ (\Box\text{左})^{\dagger} \qquad \frac{\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta,\ \beta : A}{\Gamma \overset{\mathcal{L}-\{\beta\}}{\Rightarrow} \Delta,\ \alpha : \Box A}\ (\Box\text{右})^{\ddagger}$$

$$\frac{\beta : A,\ \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta}{\alpha : \Diamond A,\ \Gamma \overset{\mathcal{L}-\{\beta\}}{\Rightarrow} \Delta}\ (\Diamond\text{左})^{\ddagger} \qquad \frac{\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta,\ \beta : A}{\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta,\ \alpha : \Diamond A}\ (\Diamond\text{右})^{\dagger}$$

ただしこれらは次の条件が満たされているときのみ使用可能である.

(†)（**$\Box$ 左と $\Diamond$ 右規則のラベル条件**）$\alpha \in \mathcal{L}$.

(‡)（**$\Box$ 右と $\Diamond$ 左規則のラベル条件**）$\alpha \in \mathcal{L}$，$\alpha \neq \beta$，かつ β は Γ, Δ 中には現われない.

（注意）$\mathbf{TS5}^{\mathrm{prop}}$においてはラベル間の「親子関係」をまったく利用しないので，ラベルは単にお互いの異同を区別できるだけでよく，ラベルが「自然数の有限列」である必要なない.

$\mathbf{TS5}^{\mathrm{prop}}$から cut 規則を取り除いた体系を $\mathbf{TS5}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}}$ と呼ぶ.

定理 30（$\mathbf{S5}^{\mathrm{prop}}_{\mathrm{H}}$と $\mathbf{TS5}^{\mathrm{prop}}$の同等性）

$$\mathbf{S5}^{\mathrm{prop}}_{\mathrm{H}} \vdash F \iff \mathbf{TS5}^{\mathrm{prop}} \vdash \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : F.$$

(証明)

($\Longrightarrow$)　$\mathbf{S5}^{\mathrm{prop}}_{\mathrm{H}} \vdash F$ の証明図に関する帰納法による．$\mathbf{S4}^{\mathrm{prop}}_{\mathrm{H}}$の部分はすでに定理 29 でやっている. $\mathbf{S5}^{\mathrm{prop}}_{\mathrm{H}}$で追加された公理 $A{\to}\Box\Diamond A$ は次のように証明できる.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle\rangle : A \overset{\{\langle\rangle,\langle 1\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : A}{\langle\rangle : A \overset{\{\langle\rangle,\langle 1\rangle\}}{\Rightarrow} \langle 1\rangle : \Diamond A}\ (\Diamond\text{右})}{\langle\rangle : A \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : \Box\Diamond A}\ (\Box\text{右})}{\overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : A{\to}\Box\Diamond A}\ ({\to}\text{右})$$

($\Longleftarrow$)　次の事実を $\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ の証明図に関する帰納法で示す：

$\mathbf{TS5}^{\mathrm{prop}} \vdash \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ ならば $\mathbf{S5}^{\mathrm{prop}}_{\mathrm{H}} \vdash \Box\Big(\bigwedge(\Gamma_{\alpha_1}){\to}\bigvee(\Delta_{\alpha_1})\Big) \vee \cdots \vee \Box\Big(\bigwedge(\Gamma_{\alpha_n}){\to}\bigvee(\Delta_{\alpha_n})\Big)$.
ただし $\mathcal{L} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

これが示されれば,

$$\mathbf{S5}^{\mathrm{prop}}_{\mathrm{H}} \vdash \Box(\top{\to}(\bot{\vee}F)) \to F$$

と規則 modus ponens をあわせて題意は示される．上の事実は，$\Box$, $\Diamond$ の規則以外については定理 21 と同様に（もう少し簡単に）できる．$\Box$, $\Diamond$ の規則については，それぞれ

($\Box$ 左, $\alpha \neq \beta$) $\mathbf{S5}^{\mathrm{prop}}_{\mathrm{H}} \vdash \Big(\Box((A{\wedge}C){\to}D) \vee \Box(E{\to}F)\Big) \to \Big(\Box(C{\to}D) \vee \Box((\Box A{\wedge}E){\to}F)\Big)$

($\Box$ 左, $\alpha = \beta$) $\mathbf{S5}^{\mathrm{prop}}_{\mathrm{H}} \vdash \Big(\Box((A{\wedge}C){\to}D)\Big) \to \Big(\Box((\Box A{\wedge}C){\to}D)\Big)$

(□ 右) $\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash \Big(\Box A \lor \Box(C \to D)\Big) \to \Box(C \to (D \lor \Box A))$
(◊ 左) $\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash \Big(\Box(A \to \bot) \lor \Box(C \to D)\Big) \to \Box((\Diamond A \land C) \to D)$
(◊ 右, $\alpha \neq \beta$) $\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash \Big(\Box(C \to (D \lor A)) \lor \Box(E \to F)\Big) \to \Big(\Box(C \to D) \lor \Box(E \to (F \lor \Diamond A))\Big)$
(◊ 右, $\alpha = \beta$) $\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}} \vdash \Big(\Box(C \to (D \lor A))\Big) \to \Big(\Box(C \to (D \lor \Diamond A))\Big)$

を使えば示される． **(証明終)**

問題 31

上の証明中の最後の部分の (□ 左)(□ 右)(◊ 左)(◊ 右) にそれぞれ相当する論理式の $\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{prop}}$ における証明（の方針）を書け．

3.4 完全性

前章の飽和の条件ので，□ 左条件と ◊ 右条件を以下のように変更（強めた）したものを **S4 飽和**と呼ぶ．

（**S4** のための □ 左条件） $\alpha : \Box A \in \Gamma$ ならば，$\alpha \preceq \beta$ なる $\mathcal{L}$ 内の任意のラベル β に対して $\beta : A \in \Gamma$．
（**S4** のための ◊ 右条件） $\alpha : \Diamond A \in \Delta$ ならば，$\alpha \preceq \beta$ なる $\mathcal{L}$ 内の任意のラベル β に対して $\beta : A \in \Delta$．

補題 32

$\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ が有限ツリーシークエントで $\mathbf{TS4}_{-\mathrm{cut}}^{\mathrm{prop}} \nvdash \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ ならば，$\Gamma \subseteq \Gamma^+$，$\Delta \subseteq \Delta^+$，$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$，$\mathbf{TS4}_{-\mathrm{cut}}^{\mathrm{prop}} \nvdash \Gamma^+ \overset{\mathcal{L}^+}{\Rightarrow} \Delta^+$ なる **S4** 飽和ツリーシークエント $\Gamma^+ \overset{\mathcal{L}^+}{\Rightarrow} \Delta^+$ が存在する．

(証明) 補題 23 と同様． **(証明終)**

前章の飽和の条件ので，□ と ◊ に関する条件を以下のように変更したものを **S5 飽和**と呼ぶ．

（**S5** のための □ 左条件） $\alpha : \Box A \in \Gamma$ ならば，$\mathcal{L}$ 内の任意のラベル β に対して $\beta : A \in \Gamma$．
（**S5** のための □ 右条件） $\alpha : \Box A \in \Delta$ ならば，$\mathcal{L}$ 内のあるラベル β に対して $\beta : A \in \Delta$．
（**S5** のための ◊ 左条件） $\alpha : \Diamond A \in \Gamma$ ならば，$\mathcal{L}$ 内のあるラベル β に対して $\beta : A \in \Gamma$．
（**S5** のための ◊ 右条件） $\alpha : \Diamond A \in \Delta$ ならば，$\mathcal{L}$ 内の任意のラベル β に対して $\beta : A \in \Delta$．

補題 33

$\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ が有限ツリーシークエントで $\mathbf{TS5}_{-\mathrm{cut}}^{\mathrm{prop}} \nvdash \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ ならば，$\Gamma \subseteq \Gamma^+$，$\Delta \subseteq \Delta^+$，$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$，$\mathbf{TS5}_{-\mathrm{cut}}^{\mathrm{prop}} \nvdash \Gamma^+ \overset{\mathcal{L}^+}{\Rightarrow} \Delta^+$ なる **S5** 飽和ツリーシークエント $\Gamma^+ \overset{\mathcal{L}^+}{\Rightarrow} \Delta^+$ が存在する．

(証明) 補題 23 と同様． **(証明終)**

定理 34（$\mathbf{TS4}_{-\mathrm{cut}}^{\mathrm{prop}}$ の完全性）

左辺が空で右辺がひとつのラベル付き論理式からなる有限ツリーシークエント ($\overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \lambda : F$) が $\mathbf{TS4}_{-\mathrm{cut}}^{\mathrm{prop}}$ で証明不可能ならば，推移的かつ反射的なあるクリプキモデルのある可能世界でその右辺の論理式 F が False になる．

(証明) 定理 25 と同様.（**S4** 飽和ツリーシークエント $\Gamma^+ \overset{\mathcal{L}^+}{\Rightarrow} \Delta^+$ を用いて，クリプキモデルの到達可能関係 $\rightsquigarrow$ を $\mathcal{L}^+$ 上の $\preceq$ で定義する.） **(証明終)**

定理 35（$\mathbf{TS5}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}}$ の完全性）

左辺が空で右辺がひとつのラベル付き論理式からなる有限ツリーシークエント $(\overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \lambda : F)$ が $\mathbf{TS5}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}}$ で証明不可能ならば，推移的かつ反射的かつ対称的なあるクリプキモデルのある可能世界でその右辺の論理式 F が False になる.

(証明) 定理 25 と同様.（**S5** 飽和ツリーシークエント $\Gamma^+ \overset{\mathcal{L}^+}{\Rightarrow} \Delta^+$ を用いて，$\mathcal{L}^+$ 上のすべてのラベル間に到達可能関係 $\rightsquigarrow$ が付くようにクリプキモデルを定義する.） **(証明終)**

定理 36（$\mathbf{S4}^{\mathrm{prop}}_{\mathrm{H}}$，$\mathbf{TS4}^{\mathrm{prop}}$ の完全性，健全性，カット除去）

次の四条件は同値である.（1）$\mathbf{S4}^{\mathrm{prop}}_{\mathrm{H}} \vdash F$.（2）$\mathbf{TS4}^{\mathrm{prop}} \vdash \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : F$.（3）$\mathbf{TS4}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}} \vdash \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : F$.（4）$\mathsf{S4} \models F$.

(証明) 定理 27，29，34 による（(3)$\Longrightarrow$(2) は定義から明らか）. **(証明終)**

定理 37（$\mathbf{S5}^{\mathrm{prop}}_{\mathrm{H}}$，$\mathbf{TS5}^{\mathrm{prop}}$ の完全性，健全性，カット除去）

次の四条件は同値である.（1）$\mathbf{S5}^{\mathrm{prop}}_{\mathrm{H}} \vdash F$.（2）$\mathbf{TS5}^{\mathrm{prop}} \vdash \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : F$.（3）$\mathbf{TS5}^{\mathrm{prop}}_{-\mathrm{cut}} \vdash \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : F$.（4）$\mathsf{S5} \models F$.

(証明) 定理 28，30，35 による（(3)$\Longrightarrow$(2) は定義から明らか）. **(証明終)**

4 様相述語論理

4.1 論理式

様相述語論理の論理式は古典述語論理の論理式に様相記号を加えたものであり，次で定義される.

- 命題変数（0 引数述語記号）は論理式である.
- $n \geq 1$ で $\mathbf{p}$ が n 引数述語記号で $t_1, \ldots, t_n$ が項（自由変数記号または定数記号）のとき，$\mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n)$ は論理式である.
- $\top$ と $\bot$ はそれぞれ論理式である.
- A，B が論理式ならば，次の四つ：$(A{\wedge}B)$，$(A{\vee}B)$，$(A{\rightarrow}B)$，$(\neg A)$ もそれぞれ論理式である.
- A が論理式，x が A 中に出現しない束縛変数記号，a が自由変数記号ならば，次の二つ：$(\forall x A[x/a])$，$(\exists x A[x/a])$，もそれぞれ論理式である.

- A が論理式ならば，次の二つ：$(\Box A)$，$(\Diamond A)$ もそれぞれ論理式である．

以後 A, B などは様相述語論理の論理式を指す．

4.2 フレーム

可能世界の非空集合 W と，W 上の到達可能関係 $\rightsquigarrow$ と,「各可能世界に非空集合（その世界における対象領域）を対応させる関数 D」で，条件

$x \rightsquigarrow y$ ならば $D(x) \subseteq D(y)$

を満たすものの組 $\langle W, \rightsquigarrow, D\rangle$ を**述語論理のクリプキフレーム**，または単に**フレーム**と呼ぶ．特に条件

$x \rightsquigarrow y$ ならば $D(x) = D(y)$

が成り立つ場合，これを**定領域フレーム**と呼ぶ．

$\mathcal{F} = \langle W, \rightsquigarrow, D\rangle$ をフレームとする．このフレームにおける解釈 $\mathcal{I}$ とは，次の要素から成る．

- 各定数記号を対象領域 $\bigcup_{w\in W} D(w)$ のどの要素に解釈するか．定数記号 $\mathbf{c}$ の $\mathcal{I}$ による解釈を $\mathbf{c}^{\mathcal{I}}$ と書く．
- 各 n 引数述語記号を各可能世界の対象領域上のどんな n 引数述語に解釈するか．可能世界 w における n 引数述語記号 $\mathbf{p}$ の $\mathcal{I}$ による解釈（$D(w)^n$ から $\{\mathsf{True}, \mathsf{False}\}$ への関数）を $\mathbf{p}_w^{\mathcal{I}}$ と書く．特に $n = 0$ の場合は $\mathbf{p}_w^{\mathcal{I}} \in \{\mathsf{True}, \mathsf{False}\}$ である．

フレームと解釈を合わせたものを**クリプキモデル**と呼ぶ．

クリプキモデル $\mathcal{M} = \langle W, \rightsquigarrow, D, \mathcal{I}\rangle$ の対象領域 $\bigcup_{w\in W} D(w)$ の各要素の**名前**を定数記号として加えた言語を「D による名前拡張言語」と呼ぶ．対象領域の要素 δ の名前が $\mathbf{d}$ であるとき，当然 $\mathbf{d}^{\mathcal{I}} = \delta$ とする．X が D による名前拡張言語の閉論理式で，可能世界 w に対して条件

X 中に現われるどんな定数記号の解釈も $D(w)$ の要素である

を満たしているとき，X は w で**解釈可能である**と言う.「可能世界 $w \in W$ において解釈可能な論理式 X の真理値（True か False）」を $\mathcal{M}(w, X)$ と書く．これは次のように X の構成に関して再帰的に定義される．

$\mathcal{M}(w, \mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n)) = \mathbf{p}_w^{\mathcal{I}}(t_1^{\mathcal{I}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I}})$

$\mathcal{M}(w, \top) = \mathsf{True}.$
$\mathcal{M}(w, \bot) = \mathsf{False}.$

$\mathcal{M}(w, A\wedge B) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(w, A) = \mathsf{True}$ かつ $\mathcal{M}(w, B) = \mathsf{True}.$
$\mathcal{M}(w, A\vee B) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(w, A) = \mathsf{True}$ または $\mathcal{M}(w, B) = \mathsf{True}.$
$\mathcal{M}(w, A\to B) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(w, A) = \mathsf{False}$ または $\mathcal{M}(w, B) = \mathsf{True}.$
$\mathcal{M}(w, \neg A) = \mathsf{True} \iff \mathcal{M}(w, A) = \mathsf{False}.$

$\mathcal{M}(w, \forall xA) = \mathsf{True} \iff D(w)$ の任意の要素の名前 $\mathbf{d}$ に対して $\mathcal{M}(w, A[\mathbf{d}/x]) = \mathsf{True}.$
$\mathcal{M}(w, \exists xA) = \mathsf{True} \iff D(w)$ のある要素の名前 $\mathbf{d}$ に対して $\mathcal{M}(w, A[\mathbf{d}/x]) = \mathsf{True}.$

$$\mathcal{M}(w,\Box A)=\mathsf{True} \quad\Longleftrightarrow\quad w \rightsquigarrow x \text{ となるすべての } x\in W \text{ に対して } \mathcal{M}(x,A)=\mathsf{True}.$$
$$\mathcal{M}(w,\Diamond A)=\mathsf{True} \quad\Longleftrightarrow\quad w \rightsquigarrow x \text{ となるある } x\in W \text{ に対して } \mathcal{M}(x,A)=\mathsf{True}.$$

F を様相述語論理のフレームのある集まり，A を名前定数を含まない論理式とし，A 中のすべての自由変数記号を $a_1,\ldots,a_n$ （ただし $n\geq 0$ で $a_1,\ldots,a_n$ はすべて異なる）とする．このとき，F 中の任意のフレーム $\mathcal{F}$ に任意の解釈を付けたモデル $\mathcal{M}=\langle W,\rightsquigarrow,D,\mathcal{I}\rangle$ の任意の可能世界 $w\in W$ において，条件

A が w で解釈可能ならば，w における対象領域 $D(w)$ の任意の要素の名前 $\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n$ に対して $\mathcal{M}(w,A[\mathbf{d_1}/a_1]\cdots[\mathbf{d_n}/a_n])=\mathsf{True}$

が成り立つことを,「A は F で恒真である」と言い

$$\mathcal{F}\models A$$

と書く．

様相述語論理のフレームの集まりを次のように定義する．

K $\cdots$ すべてのフレームの集まり．
K_{CD} $\cdots$ すべての定領域フレームの集まり．
S4 $\cdots$ すべての推移的反射的フレームの集まり．
$\mathsf{S4}_{\mathsf{CD}}$ $\cdots$ すべての定領域推移的反射的フレームの集まり．
S5 $\cdots$ すべての推移的反射的対称的フレームの集まり（到達可能関係の対称性と対象領域の条件から定領域の条件が満たされる）．

問題 38

次の三つを示せ．
(1) $\mathsf{K}\models\Box\forall xA\to\forall x\Box A$.
(2) $\mathsf{K}\not\models\forall x\Box A\to\Box\forall xA$.
(3) $\mathsf{K}_{\mathsf{CD}}\models\forall x\Box A\to\Box\forall xA$.

上の問題 (2)(3) の論理式は**バルカン式**と呼ばれる．

4.3 ヒルベルト流体系

様相命題論理と古典述語論理のヒルベルト流体系を合わせた体系を $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$ と呼ぶ．すなわち $\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$ は次の公理と規則を持つ．

公理：
$\top$, $\neg\bot$, $A\to(B\to A)$, $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$, $A\to(B\to(A\wedge B))$, $(A\wedge B)\to A$, $(A\wedge B)\to B$, $A\to(A\vee B)$, $B\to(A\vee B)$, $(A\to C)\to((B\to C)\to((A\vee B)\to C))$, $(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$, $\forall xA\to(A[t/x])$, $(A[t/x])\to\exists xA$, $\neg\neg A\to A$. $\Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B)$, $\Diamond A\leftrightarrow\neg\Box\neg A$.

規則

$$\frac{A{\to}B \quad A}{B}\ (\text{modus ponens}) \qquad \frac{A{\to}(B[a/x])}{A{\to}\forall xB}\ (\forall) \qquad \frac{(B[a/x]){\to}A}{\exists xB{\to}A}\ (\exists)$$

$$\frac{A}{\Box A}\ (\text{necessitation})$$

ただし ∀ と ∃ の規則は次の条件が満たされているときのみ使用可能である．

（∀,∃ **規則の変数条件**）a は A, B 中に出現しない自由変数である．

$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$に次のように公理を加えた体系をそれぞれ $\mathbf{KBF}_{\mathrm{H}}$，$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}$，$\mathbf{S4BF}_{\mathrm{H}}$，$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}$ と呼ぶ．

$\mathbf{KBF}_{\mathrm{H}} = \mathbf{K}_{\mathrm{H}} + (\forall x\Box A{\to}\Box\forall xA)$.
$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}} = \mathbf{K}_{\mathrm{H}} + (\Box A{\to}\Box\Box A) + (\Box A{\to}A)$.
$\mathbf{S4BF}_{\mathrm{H}} = \mathbf{S4}_{\mathrm{H}} + (\forall x\Box A{\to}\Box\forall xA)$.
$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}} = \mathbf{S4}_{\mathrm{H}} + (A{\to}\Box\Diamond A)$.

定理 39（$\mathbf{K}_{\mathrm{H}}$，$\mathbf{KBF}_{\mathrm{H}}$，$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}}$，$\mathbf{S4BF}_{\mathrm{H}}$，$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}$の健全性，完全性）

$\mathbf{K}_{\mathrm{H}} \vdash F \iff \mathsf{K} \models F$.
$\mathbf{KBF}_{\mathrm{H}} \vdash F \iff \mathsf{K}_{\mathsf{CD}} \models F$.
$\mathbf{S4}_{\mathrm{H}} \vdash F \iff \mathsf{S4} \models F$.
$\mathbf{S4BF}_{\mathrm{H}} \vdash F \iff \mathsf{S4}_{\mathsf{CD}} \models F$.
$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}} \vdash F \iff \mathsf{S5} \models F$.

(証明)　健全性（$\Longrightarrow$）はいずれもヒルベルト流の証明図に関する帰納法で示される．完全性（$\Longleftarrow$）はいずれもツリーシークエントの方法で示すことができる．次の節で **S5** についてだけ示す．　**(証明終)**

4.4　様相述語論理 S5 の完全性

TS5 は $\mathbf{TS5}^{\mathrm{prop}}$に ∀，∃ に関する以下の規則（**LK** の規則にラベルを付けたもの）を加えたツリーシークエント計算体系である．

$$\frac{\alpha : A[t/x],\ \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta}{\alpha : \forall xA,\ \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta}\ (\forall 左) \qquad \frac{\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta,\ \alpha : A[a/x]}{\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta,\ \alpha : \forall xA}\ (\forall 右)^{\dagger}$$

$$\frac{\alpha : A[a/x],\ \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta}{\alpha : \exists xA,\ \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta}\ (\exists 左)^{\dagger} \qquad \frac{\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta,\ \alpha : A[t/x]}{\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta,\ \alpha : \exists xA}\ (\exists 右)$$

(†)（∀ **右,**∃ **左規則の変数条件**）a は (A, Γ, Δ) 中に出現しない自由変数である．

TS5 から cut 規則を取り除いた体系を $\mathbf{TS5}_{-\mathrm{cut}}$と呼ぶ．

定理 40（$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}$と TS5 の同等性）

$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}} \vdash F \iff \mathbf{TS5} \vdash \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rightarrow} \langle\rangle : F$.

(証明)

($\Longrightarrow$)　$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}} \vdash F$ の証明図に関する帰納法による．定理 9，30 を合わせればよい．

($\Longleftarrow$)　定理 30 と同様に次の事実を $\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \Delta$ の証明図に関する帰納法で示す：

$\mathbf{TS5} \vdash \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rrightarrow} \Delta$ ならば $\mathbf{S5_H} \vdash \Box\Big(\bigwedge(\Gamma_{\alpha_1}) \to \bigvee(\Delta_{\alpha_1})\Big) \vee \cdots \vee \Box\Big(\bigwedge(\Gamma_{\alpha_n}) \to \bigvee(\Delta_{\alpha_n})\Big)$.
ただし $\mathcal{L} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

$\forall$ と $\exists$ 以外の規則については定理 30 で示されている．$\forall$，$\exists$ については，次の規則が $\mathbf{S5_H}$ で使用可能であることを示して，それを使えばできる．

$$\frac{\Box A \vee \Box B_1 \vee \cdots \vee \Box B_n}{A \vee \Box B_1 \vee \cdots \vee \Box B_n}\ (n \geq 0) \qquad \frac{A \vee \Box B_1 \vee \cdots \vee \Box B_n}{\Box A \vee \Box B_1 \vee \cdots \vee \Box B_n}\ (n \geq 0)$$

$$\frac{(A[t/x] \wedge B \to C) \vee D}{(\forall x A \wedge B \to C) \vee D} \qquad \frac{(B \to C \vee A[a/x]) \vee D}{(B \to C \vee \forall x A) \vee D}\ (a \text{ が } A, B, C, D \text{ 中に現われないとき})$$

$$\frac{(A[a/x] \wedge B \to C) \vee D}{(\forall x A \wedge B \to C) \vee D}\ (a \text{ が } A, B, C, D \text{ 中に現われないとき}) \qquad \frac{(B \to C \vee A[t/x]) \vee D}{(B \to C \vee \exists x A) \vee D}$$

(証明終)

問題 41

上の証明中の「規則」が $\mathbf{S5_H}$ で使用可能であること（の方針）を示せ．

前節の **S5 飽和**に，以下の条件を追加する．

（$\forall$ 左条件）　$\alpha : \forall x A \in \Gamma$ ならば，任意の項 t に対して $\alpha : A[t/x] \in \Gamma$.
（$\forall$ 右条件）　$\alpha : \forall x A \in \Delta$ ならば，ある項 t に対して $\alpha : A[t/x] \in \Delta$.
（$\exists$ 左条件）　$\alpha : \exists x A \in \Gamma$ ならば，ある項 t に対して $\alpha : A[t/x] \in \Gamma$.
（$\exists$ 右条件）　$\alpha : \exists x A \in \Delta$ ならば，任意の項 t に対して $\alpha : A[t/x] \in \Delta$.

補題 42

$\Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rrightarrow} \Delta$ が有限ツリーシークエントで $\mathbf{TS5_{-cut}} \nvdash \Gamma \overset{\mathcal{L}}{\Rrightarrow} \Delta$ ならば，$\Gamma \subseteq \Gamma^+$，$\Delta \subseteq \Delta^+$，$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$，$\mathbf{TS5_{-cut}} \nvdash \Gamma^+ \overset{\mathcal{L}^+}{\Rrightarrow} \Delta^+$ なる **S5** 飽和ツリーシークエント $\Gamma^+ \overset{\mathcal{L}^+}{\Rrightarrow} \Delta^+$ が存在する．

(証明)　補題 10，33 と同様．　**(証明終)**

定理 43（$\mathbf{TS5_{-cut}}$ の完全性）

左辺が空で右辺がひとつのラベル付き論理式からなる有限ツリーシークエント $(\overset{\mathcal{L}}{\Rrightarrow} \lambda : F)$ が $\mathbf{TS5_{-cut}}$ で証明不可能ならば，S5 $\not\models F$.

(証明)　定理 12，35 を合わせたような議論をすればよい．　**(証明終)**

以上の定理 40，43 と $\mathbf{S5_H}$ の健全性（定理 39 の（$\Longrightarrow$））合わせれば，$\mathbf{S5_H}$ の完全性や **TS5** のカット除去，すなわち次が示される．

定理 44（$\mathbf{S5_H}$，TS5 の完全性，健全性，カット除去）

次の四条件は同値である．(1) $\mathbf{S5_H} \vdash F$．(2) $\mathbf{TS5} \vdash \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rrightarrow} \langle\rangle : F$．(3) $\mathbf{TS5_{-cut}} \vdash \overset{\{\langle\rangle\}}{\Rrightarrow} \langle\rangle : F$．(4) S5 $\models F$.

問題 45

$\mathbf{S5}_{\mathrm{H}}$におけるバルカン式 $\forall x\Box A\to\Box\forall xA$ の証明（の方針）を書け.