

# 中間命題論理の公理の非一般性について

2005 年 7 月 14 日 鹿島亮

中間命題論理の公理がある自然な興味深い性質を持つか、ということを示そうとしている試みの途中経過を報告する。以下で「命題」というのは成り立つか否かが現在不明の主張（あるいは一般には成り立たない主張）、「定理」というのは（たぶん）証明できた主張である。

論理式は命題変数 ( $a, b, p, q, x, y$  等で表す) と論理記号  $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg$  から作られる（ただし、後半では  $\rightarrow, \wedge, \vee$  だけを考える）。論理式を  $A, B$  等で表す。

「代入」とは命題変数への論理式の代入のことである。論理式  $A, B$  について、ある代入  $\theta$  が存在して  $A^\theta = B$  となっていることを

$$A \preceq B$$

と書く。

$$\text{例: } a \rightarrow a \rightarrow (b \vee c) \preceq (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (b \vee b).$$

トートロジー（すなわち古典論理で証明できる命題論理式） $A$  に対して、

$$A_0 \preceq A \text{ かつ } A \not\preceq A_0$$

なる条件を満たすトートロジー  $A_0$  が存在するとき、「 $A$  はトートロジーとして非一般的である」と言う。また、このような  $A_0$  を「 $A$  の一般形」と呼ぶ。

例:  $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a)$  も  $\neg a \vee \neg \neg a$  もトートロジーとして非一般的である。なぜならそれぞれ一般形  $(a \rightarrow b) \vee (c \rightarrow a)$  と  $b \vee \neg b$  がある。

問題: 次は一般に成り立つか。

## 命題 1

直観主義論理に公理型  $X$  を加えて得られる論理が真の中間論理（すなわち直観主義論理よりも真に強く古典論理よりも真に弱い）ならば、 $X$  はトートロジーとして非一般的である。

これは古森雄一氏が（もともとは  $\rightarrow$  だけの部分について）提起した問題である。

実は、命題 1 は  $\neg$  があると一般に成り立たない。

$$\text{反例: } X = \neg(a \wedge b) \rightarrow (\neg a \vee \neg b) \text{ (これは } \neg a \vee \neg \neg a \text{ を公理とするのに等しい.)}$$

しかし、この反例は  $\neg$  を  $\rightarrow \perp$  で表せば、反例でなくなる：なぜなら、 $((a \wedge b) \rightarrow \perp) \rightarrow ((a \rightarrow \perp) \vee (b \rightarrow \perp))$  には一般形  $((a \wedge b) \rightarrow x) \rightarrow ((a \rightarrow x) \vee (b \rightarrow y))$  がある。

次の命題が成り立てば命題 1 も成り立つことがすぐにわかる

**命題 2**

トートロジー  $X$  が「トートロジーとして非一般的でない」ならば、次のどちらかが成り立つ。

- $\text{Int} \vdash X$  .
- ある代入  $\theta$  が存在して、 $\text{Int} \vdash X^\theta \rightarrow (x \vee (x \rightarrow y))$  .

ただし「 $\text{Int} \vdash$ 」は直観主義論理での証明可能性を表す。

なお、 $(x \vee (x \rightarrow y))$  というのは、「直観主義論理に公理として加えると古典論理になる」という性質の論理式ならば他のものでもよい。

先程の反例から、命題 2 は当然  $\neg$  を含んだ一般の  $X$  については成り立たない。そこで ( $\neg$  を  $\rightarrow \perp$  で表すのではなく) まず簡単のために  $\perp$  も  $\neg$  も無い部分で考える。つまり、以後論理記号は  $\rightarrow, \wedge, \vee$  のみとする。

論理式の有限マルチセット  $\Gamma, \Delta$  に対して  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  という表現をシーケントと呼ぶ。シーケント計算 LK を次で定義する。

始シーケント  $a \Rightarrow a$

推論規則

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \rightarrow B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} (\rightarrow \text{左}) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow \text{右}) \\
 \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\wedge \text{左}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Pi \Rightarrow \Sigma, B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, A \wedge B} (\wedge \text{右}) \\
 \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \vee B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} (\vee \text{左}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} (\vee \text{右}) \\
 \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\text{weakening 左}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} (\text{weakening 右}) \\
 \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\text{contraction 左}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} (\text{contraction 右})
 \end{array}$$

当然次が成り立つ。

$$\text{LK} \vdash \Rightarrow X \quad \Longleftrightarrow \quad X \text{ はトートロジー。}$$

LK から一般形を抽出したような体系  $\text{LK}_g$  を次で定義する。

始シーケント  $a \Rightarrow a$

推論規則

- 論理記号に関する規則は LK と同様。ただし前提が二つある規則 ( $\rightarrow$  左,  $\wedge$  右,  $\vee$  左) については  
二つの前提が共通の命題変数を含まない  
という条件を付ける。

- weakening は次の形 .

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{a, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (weakening 左)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, a} \text{ (weakening 右)}$$

ただし,  $a$  は前提に現れない命題変数 .

- contraction は次の形

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{C, \Gamma^\theta \Rightarrow \Delta^\theta} \text{ (contraction 左)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma^\theta \Rightarrow \Delta^\theta, C} \text{ (contraction 右)}$$

ただし,  $A, B$  は代入で unify 可能であり,  $\theta$  はその most general unifier であり,  $A^\theta = B^\theta = C$  であり,  $C$  中の命題変数はすべて前提に現れない新しいものである .

LK と LK<sub>g</sub> の証明の例

$$\begin{array}{c} \frac{a \Rightarrow a \quad b \Rightarrow b}{a \Rightarrow a \quad a \rightarrow b, a \Rightarrow b} \\ \frac{a \rightarrow (a \rightarrow b), a, a \Rightarrow b}{a \rightarrow (a \rightarrow b), a \Rightarrow b} \text{ (contr.)} \\ \frac{a \rightarrow (a \rightarrow b), a, c \rightarrow d \Rightarrow b}{a \rightarrow (a \rightarrow b), a, c \rightarrow d \Rightarrow b} \text{ (weak.)} \\ \frac{a \rightarrow (a \rightarrow b), a \Rightarrow (c \rightarrow d) \rightarrow b}{a \rightarrow (a \rightarrow b) \Rightarrow a \rightarrow ((c \rightarrow d) \rightarrow b)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{a' \Rightarrow a' \quad b \Rightarrow b}{a' \Rightarrow a' \quad a' \rightarrow b, a' \Rightarrow b} \\ \frac{a'' \rightarrow (a' \rightarrow b), a'', a' \Rightarrow b}{a'' \rightarrow (a' \rightarrow b), a' \Rightarrow b} \text{ (contr.)} \\ \frac{a'' \rightarrow (a' \rightarrow b), a, e \Rightarrow b}{a'' \rightarrow (a' \rightarrow b), a, e \Rightarrow b} \text{ (weak.)} \\ \frac{a'' \rightarrow (a' \rightarrow b), a \Rightarrow e \rightarrow b}{a'' \rightarrow (a' \rightarrow b) \Rightarrow a \rightarrow (e \rightarrow b)} \end{array}$$

右の LK<sub>g</sub> の証明は左の LK の証明の「一般形」になっている . 正確には次が言える .

**定理 3**

LK  $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$  ならば, あるシーケント  $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$  とある代入  $\theta$  が存在して, LK<sub>g</sub>  $\vdash \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$  かつ  $(\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0)^\theta = (\Gamma \Rightarrow \Delta)$  となる .

(証明) LK の証明に関する帰納法 .

$$\frac{F, F, \Pi \Rightarrow \Delta}{F, \Pi \Rightarrow \Delta} \text{ (contr.)}$$

のとき . 帰納法の仮定 :

$$\text{LK}_g \vdash A, B, \Pi_0 \Rightarrow \Delta_0, \quad (A, B, \Pi_0 \Rightarrow \Delta_0)^\theta = (F, F, \Pi \Rightarrow \Delta)$$

ここで  $A, B$  は代入  $\theta$  で  $F$  に unify 可能なので, most general unifier  $\sigma$  とまったく新しい命題変数から成る論理式  $C$  と代入  $\tau$  があり次が成り立つ .

$$A^\sigma = B^\sigma = C, \quad F = C^\tau \quad \theta = \sigma \circ \tau, (\sigma, \tau \text{ の順に適用する合成})$$

したがって次を得る .

$$\frac{A, B, \Pi_0 \Rightarrow \Delta_0}{C, (\Pi_0)^\sigma \Rightarrow (\Delta_0)^\sigma} \text{ (contr.)}$$

$$(C, (\Pi_0)^\sigma \Rightarrow (\Delta_0)^\sigma)^\tau = (F, \Pi \Rightarrow \Delta)$$

(証明終)

そこで, 命題 2 を示すためには, 次を示せばよいということになる .

**命題 4**

$\mathbf{LK}_g \vdash \Rightarrow X$  ならば、次のどちらかが成り立つ。

- $\mathbf{Int} \vdash X$  .
- ある代入  $\theta$  が存在して、 $\mathbf{Int} \vdash X^\theta \rightarrow (x \vee (x \rightarrow y))$  .

(命題 4 を用いた命題 2 の証明)

$X$  がトートロジーならば  $\mathbf{LK} \vdash \Rightarrow X$  であり、定理 3 から

$$(1) \mathbf{LK}_g \vdash \Rightarrow X_0$$

$$(2) (X_0)^\sigma = X$$

となる論理式  $X$  と代入  $\sigma$  が存在する。ここで  $X$  がトートロジーとして非一般的でないならば、(1)(2) から代入  $\tau$  が存在して

$$X^\tau = X_0 \quad (\text{したがって } X \preceq X_0)$$

となっているはずである。(1) と命題 4 から

(ア)  $\mathbf{Int} \vdash X_0$  .

(イ) ある代入  $\theta$  が存在して、 $\mathbf{Int} \vdash (X_0)^\theta \rightarrow (x \vee (x \rightarrow y))$  .

のどちらかが成り立つ。(ア) の場合は

$$\mathbf{Int} \vdash (X_0)^\sigma \text{ すなわち } \mathbf{Int} \vdash X$$

を得る。(イ) の場合は

$$\mathbf{Int} \vdash X^{\tau \circ \theta} \rightarrow (x \vee (x \rightarrow y))$$

を得る。

(証明終)

命題 4 は、今のところ次の制限された形で示されている(たぶん)。

$\mathbf{LK}_g$  の contraction を

$$\frac{a, b, \Gamma \Rightarrow \Delta}{c, \Gamma[a := c, b := c] \Rightarrow \Delta[a := c, b := c]} \quad (\text{contr. 左}) \quad (c \text{ は新しい変数})$$

(contr. 右も同様) というように atomic に制限した体系を  $\mathbf{LK}_{ga}$  と呼ぶ。

**定理 5**

$\mathbf{LK}_{ga} \vdash \Rightarrow X$  ならば、次のどちらかが成り立つ。

- $\mathbf{Int} \vdash X$  .
- ある代入  $\theta$  が存在して、 $\mathbf{Int} \vdash X^\theta \rightarrow (x \vee (x \rightarrow y))$  .

以下ではこの証明のアイデアを説明する。

weakening も contraction もない体系  $\mathbf{LK}_n$  を次で定義する。

始シーケント  $a \Rightarrow a$

推論規則

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \rightarrow B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} (\rightarrow\text{左}) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow\text{右}) \\
\\
\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow a} (\rightarrow\text{右 w}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, a \rightarrow B} (\rightarrow\text{右 w}) \\
\\
\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\wedge\text{左}) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge a, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\wedge\text{左 w}) \quad \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{a \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\wedge\text{左 w}) \\
\\
\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Pi \Rightarrow \Sigma, B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, A \wedge B} (\wedge\text{右}) \\
\\
\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \vee B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} (\vee\text{左}) \\
\\
\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} (\vee\text{右}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee a} (\vee\text{右 w}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, a \vee B} (\vee\text{右 w})
\end{array}$$

ただし，これらのうち前提が二つある規則（ $\rightarrow\text{左}$ ,  $\wedge\text{右}$ ,  $\vee\text{左}$ ）については二つの前提に共通の命題変数がない．また，w の付いた規則中の  $a$  は，前提に現れない命題変数である．

$\text{LK}_{\text{ga}}$  と  $\text{LK}_{\text{n}}$  の証明の例

$$\begin{array}{c}
\frac{a' \Rightarrow a'}{a' \Rightarrow a', b} (\text{weak.}) \\
\frac{\Rightarrow a', a' \rightarrow b \quad a'' \Rightarrow a''}{(a' \rightarrow b) \rightarrow a'' \Rightarrow a', a''} (\text{contr.}) \\
\frac{(a \rightarrow b) \rightarrow a \Rightarrow a}{\Rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a} \\
\\
\frac{a' \Rightarrow a'}{\Rightarrow a', a' \rightarrow b} \quad \frac{a'' \Rightarrow a''}{(a' \rightarrow b) \rightarrow a'' \Rightarrow a', a''} \\
\frac{(a' \rightarrow b) \rightarrow a'' \Rightarrow a', a''}{(a' \rightarrow b) \rightarrow a'' \Rightarrow a' \vee a''} \\
\Rightarrow ((a' \rightarrow b) \rightarrow a'') \rightarrow (a' \vee a'')
\end{array}$$

定理 6

$\text{LK}_{\text{ga}} \vdash \Rightarrow X$  ならば，ある  $Y$  とふたつの代入  $\sigma, \tau$  があって，次がすべて成り立つ．

- (1)  $\text{LK}_{\text{n}} \vdash \Rightarrow Y$ .
- (2)  $\text{Int} \vdash X^\sigma \rightarrow Y$ .
- (3)  $\text{Int} \vdash Y^\tau \rightarrow X$ .

たとえば上の例では，

$$\begin{aligned}
X &= ((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a, \quad Y = ((a' \rightarrow b) \rightarrow a'') \rightarrow (a' \vee a''), \\
\sigma &= [a := (a' \vee a'')], \quad \tau = [a' := a, \quad a'' := a].
\end{aligned}$$

定理 7

$\text{LK}_{\text{n}} \vdash \Rightarrow Y$  ならば，次のどちらかが成り立つ．

- (ア)  $\text{Int} \vdash Y$ .
- (イ) ある代入  $\theta$  が存在して， $\text{Int} \vdash Y^\theta \rightarrow (x \vee (x \rightarrow y))$ .

たとえば上の例  $Y = ((a' \rightarrow b) \rightarrow a'') \rightarrow (a' \vee a'')$  では，

$$\theta = [a' := x, \quad b := y, \quad a'' := (x \rightarrow y)]$$

とすると  $\text{Int} \vdash Y^{\theta \rightarrow (x \vee (x \rightarrow y))}$  .

(定理 6, 7 を使った定理 5 の証明)

$\text{LK}_{\text{ga}} \vdash \Rightarrow X$  とする . すると定理 6 の (1)(2)(3) がすべて成り立ち , 定理 7 の (ア)(イ) のどちらかが成り立つ  $Y, \sigma, \tau, \theta$  がある . (ア) が成り立つとき , (3) から

$$\text{Int} \vdash X$$

となる . (イ) が成り立つとき , (2) から  $\text{Int} \vdash X^{\sigma \circ \theta \rightarrow (x \vee (x \rightarrow y))}$  .

(証明終)