

直観主義二階命題論理について

鹿島 亮

2005 年 11 月 24 日 数理論理学合同セミナー

1 シークエント計算

命題変数（単に変数とも呼ぶ）の可算無限集合を Prop と呼ぶ。論理式は Prop の要素, $\rightarrow, \wedge, \forall$ （命題変数に対する全称量化）で作られる。 a, b, x, y など命題変数を, A, B, X, Y など論理式を, Γ, Δ など論理式のマルチセットや集合を表す。 A 中に現れる自由変数全体, 束縛変数全体をそれぞれ $\text{FV}(A), \text{BV}(A)$ と書く。 $A[x := B]$ で A 中の自由変数 x の出現をすべて B を置き換えた論理式を表す。 A から $A[x := B]$ を得る際に変数の新たな束縛関係が生じないことを「 A 中 x に B は代入可能である」と言う。 $A[x := y][y := x] = A$ （この $=$ は両辺が文字列として等しいことを表す）のとき, 論理式中の $\forall x A$ という部分を $\forall y A[x := y]$ に替えることを 束縛変数の名前替え（または単に 名前替え）と言う。（すると, $\forall y A[x := y]$ から A も名前替えで得られることに注意。）

$\text{LJ}_{\rightarrow, \wedge, \forall^2}$ （シークエントの左辺は論理式の有限マルチセット, 右辺は単独の論理式。）

始シークエント $A \Rightarrow A$

推論規則

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Delta \Rightarrow C}{A \rightarrow B, \Gamma, \Delta \Rightarrow C} (\rightarrow\text{左}) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B} (\rightarrow\text{右}) \\[10pt] \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C} (\wedge\text{左}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \wedge B} (\wedge\text{右}) \\[10pt] \frac{A[x := B], \Gamma \Rightarrow C}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow C} (\forall\text{左}) \text{ ただし } A \text{ 中 } x \text{ に } B \text{ は代入可能} \\[10pt] \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \forall x A} (\forall\text{右}) \text{ ただし } x \notin \text{FV}(\Gamma) \\[10pt] \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{A', \Gamma \Rightarrow B} (\text{名前替え})^{(*)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A'} (\text{名前替え})^{(*)} \end{array}$$

(*) ただし A' は A から名前替えで得られる

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \Rightarrow B}{A, \Gamma \Rightarrow B} (\text{水増し}) \quad \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow B}{A, \Gamma \Rightarrow B} (\text{縮約}) \\[10pt] \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad A, \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow B} (\text{カット}) \end{array}$$

$\rightarrow$ 以外の結合子は $\rightarrow, \forall$ で表現できる。

例. $A \vee B = \forall x[(A \rightarrow x) \rightarrow ((B \rightarrow x) \rightarrow x)]$

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad x \Rightarrow x}{A \rightarrow x, \Gamma \Rightarrow x} \\ \vdots \\ \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} = \frac{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow x) \rightarrow (B \rightarrow x) \rightarrow x}{\Gamma \Rightarrow \forall x((A \rightarrow x) \rightarrow (B \rightarrow x) \rightarrow x)} \end{array}$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow C \quad B, \Delta \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma, \Delta \Rightarrow C} = \frac{\frac{A, \Gamma \Rightarrow C}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow C} \quad \frac{\frac{B, \Delta \Rightarrow C}{\Delta \Rightarrow B \rightarrow C} \quad C \Rightarrow C}{(B \rightarrow C) \rightarrow C, \Delta \Rightarrow C}}{\frac{(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C, \Gamma, \Delta \Rightarrow C}{\forall x((A \rightarrow x) \rightarrow (B \rightarrow x) \rightarrow x), \Gamma, \Delta \Rightarrow C}}$$

カット規則が無い場合には名前替え規則が真に必要なようにも思えるが、詳細は不明。たとえば次はカットも名前替えも使用せずに証明できるか？

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{(y \rightarrow a) \wedge ((y \rightarrow a) \rightarrow c)}, y \Rightarrow a \wedge c}{\forall x((y \rightarrow x) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow c)), y \Rightarrow a \wedge c} (\forall \text{左})}{\frac{\forall z \forall x((z \rightarrow x) \wedge ((z \rightarrow x) \rightarrow c)), y \Rightarrow a \wedge c}{\forall z \forall y((z \rightarrow y) \wedge ((z \rightarrow y) \rightarrow c)), y \Rightarrow a \wedge c} (\forall \text{左})} (\text{名前替え})$$

2 クリプキフレーム

W ：非空集合（可能世界の集合）， R ： W 上の反射推移的関係（到達可能関係）のとき，

$$\nabla(W) = \{\alpha \subseteq W \mid \forall x, y \in W (x R y \implies y \in \alpha)\}$$

とする． $Q \subseteq \nabla(W)$ とする（全称評価領域）． Prop から Q への関数を付値と呼ぶ．付値 V の定義域は，以下の式で論理式全体へ拡張される．

$$V(A \rightarrow B) = \{x \in W \mid \forall y \in W (x R y, y \in V(A) \implies y \in V(B))\}$$

$$V(A \wedge B) = V(A) \cap V(B).$$

$$V(\forall x A) = \bigcap_{\alpha \in Q} V_{[x:=\alpha]}(A). \quad \text{ただし } V_{[x:=\alpha]} \text{ は } V \text{ の } x \text{ についての値だけ } \alpha \text{ に変えた付値.}$$

このように V の定義域を拡張すると一般に値域も拡張されるが，どんな付値の値域も Q より広がらない場合，つまり任意の付値 V と任意の論理式 A に対して $V(A) \in Q$ であるとき，組 $\langle W, R, Q \rangle$ を一般フレームと呼ぶ． $\langle W, R, \nabla(W) \rangle$ を主フレームと呼ぶ．

論理式 A が，任意の付値 V に対して $V(A) = W$ となるとき， A はこのフレームで恒真であると言う．論理式 $(\bigwedge \Gamma) \rightarrow A$ が恒真であるとき（すなわち，任意の付値 V で $V(\bigwedge \Gamma) \subseteq V(A)$ となるとき），シーケント $\Gamma \Rightarrow A$ は恒真であると言う．

補題（付値は自由変数で決定）

A ：論理式， x ：変数， V ：一般フレーム上の付値， α ：その一般フレームの全称評価領域の要素，とする． $x \notin \text{FV}(A)$ ならば $V(A) = V_{[x:=\alpha]}(A)$ である．

補題（論理式への代入と付値への代入の同値性）

A, B ：論理式， x ：変数， V ：一般フレーム上の付値，とする． A 中 x に B が代入可能ならば $V(A[x := B]) = V_{[x:=V(B)]}(A)$ である．

補題（付値は名前替えで不変）

A から名前替えで A' が得られるとき，どんな一般フレーム上のどんな付値 V でも， $V(A) = V(A')$ ．

これらの補題はいずれも帰納法で示される。

3 完全性・健全性・カット消去

定理

シーケントに関する次の3条件は同値である。

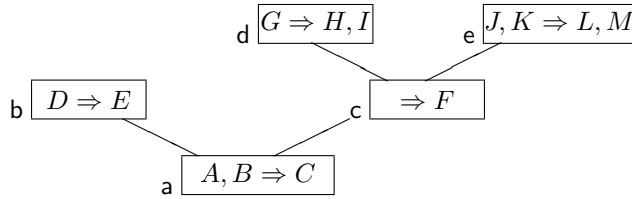
- (1) $\mathbf{LJ}_{\rightarrow, \wedge, \forall^2}$ で証明可能.
- (2) $\mathbf{LJ}_{\rightarrow, \wedge, \forall^2}$ で カット を使わずに証明可能.
- (3) 任意の一般フレームで恒真.

[(1) $\implies$ (3) (健全性) の証明]

$\mathbf{LJ}_{\rightarrow, \wedge, \forall^2}$ のすべての規則について, 「結論がある一般フレームで恒真でないならば, 前提のひとつはある一般フレームで恒真でない」を示せばよい. [証明終わり]

(3) $\implies$ (2) (カット無しの完全性) の証明のために, 「ツリーシーケント計算」の体系 $\mathcal{T}$ を導入する.

ツリーシーケントとは, 次のような有限の図形である.



$a \sim e$ はノードの名前であり, ノードの中身は論理式のマルチセットのペアである. この場合は a が根であり, ノードをつなぐ線が下から上へ「親子関係」を表す. 樹状に書くと大変なので, これをラベル付き論理式を使って次のように書く.

$$a : A, a : B, b : D, d : G, e : J, e : K \Rightarrow a : C, b : E, c : F, d : H, d : I, e : L, e : M$$

$\mathcal{T}$ は以下の始シーケントと推論規則でツリーシーケントを証明する体系である. (以下で Γ, Δ 等はラベル付き論理式のマルチセット, a, b 等はノードの名前 (ラベル) である.)

始シーケント: 「両辺に同じ論理式が含まれるノード」があるツリーシーケント

推論規則:

$$\frac{a : A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta, a : A \quad a : B, a : A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{a : A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\rightarrow \text{左})$$

$$\frac{b : A, \Gamma \Rightarrow \Delta, a : A \rightarrow B, b : B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, a : A \rightarrow B} (\rightarrow \text{右})^{(*)}$$

(*) ただし b は a の子で, b は子を持たず, b の中身は左辺の A と右辺の B だけ.

$$\frac{a : A, a : B, a : A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{a : A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\wedge \text{左})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, a : A \wedge B, a : A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, a : A \wedge B, a : B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, a : A \wedge B} (\wedge \text{右})$$

$$\frac{a : A[x := B], a : \forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{a : \forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\forall \text{左}) \text{ ただし } A \text{ 中 } x \text{ に } B \text{ が代入可能}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, a : \forall x A, a : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, a : \forall x A} \text{ (}\forall\text{右) ただし } x \notin \text{FV}(\Gamma, \Delta).$$

$$\frac{a : A', a : A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{a : A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (名前替え)**} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, a : A, a : A'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, a : A} \text{ (名前替え)**}$$

(**) ただし A' は A から名前替えて得られる.

$$\frac{b : A, a : A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{a : A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (遺伝性) ただし } b \text{ は } a \text{ の子}$$

補題 ($\mathcal{T}$ から $\mathbf{LJ}_{\rightarrow \wedge \forall^2}$ へ)

$\mathcal{T} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば, ある $a : A \in \Delta$ があってシークエント $\Gamma_{a\downarrow} \Rightarrow A$ が $\mathbf{LJ}_{\rightarrow \wedge \forall^2}$ でカット無しで証明可能である. ただし $\Gamma_{a\downarrow}$ は Γ 中で a から根に至るパス上のノードの左辺にある論理式全体.

[証明] $\mathcal{T}$ のすべての規則について確認すればよい.

[証明終わり]

ツリーシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ (ただし一般にこれは無限ツリーシークエント—ノード全体や各ノード内の集合が無限—である) が以下のすべての条件を満たすとき, これを**無矛盾飽和ツリーシークエント**と呼ぶ.

- (無矛盾性) $a : A \in \Gamma$ ならば $a : A \notin \Delta$.
- ($\rightarrow$ 左条件) $a : A \rightarrow B \in \Gamma$ ならば $a : A \in \Delta$ または $a : B \in \Gamma$.
- ($\rightarrow$ 右条件) $a : A \rightarrow B \in \Delta$ ならば, a のある子 b について $b : A \in \Gamma$ かつ $b : B \in \Delta$.
- ($\wedge$ 左条件) $a : A \wedge B \in \Gamma$ ならば $a : A \in \Gamma$ かつ $a : B \in \Gamma$.
- ($\wedge$ 右条件) $a : A \wedge B \in \Delta$ ならば $a : A \in \Delta$ または $a : B \in \Delta$.
- ($\forall$ 左条件) $a : \forall x A \in \Gamma$ で A 中 x に B が代入可能ならば, $a : A[x := B] \in \Gamma$.
- ($\forall$ 右条件) $a : \forall x A \in \Delta$ ならば, A 中 x に代入可能な B が存在して $a : A[x := B] \in \Delta$.
- (名前替え) $a : A \in \Gamma$ で A' が A から名前替えて得られるならば $a : A' \in \Gamma$.
- (名前替え) $a : A \in \Delta$ で A' が A から名前替えて得られるならば $a : A' \in \Delta$.
- (遺伝性) $a : A \in \Gamma$ で b が a の子ならば $b : A \in \Gamma$.

補題 (無矛盾飽和への拡大)

根だけのツリーシークエント $a : A_1, \dots, a : A_n \Rightarrow a : B$ が $\mathcal{T}$ で証明不可能ならば, これを拡大した無矛盾飽和ツリーシークエントが存在する.

[証明] $\mathcal{T}$ での証明不可能性を保ちながら拡大していき, その極限 (無限和) をとる.

[証明終わり]

無矛盾飽和ツリーシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ があるとして, これからフレームを作る.

$\Gamma \Rightarrow \Delta$ のツリー構造を (W, R) とする. つまり, W はノード全体の集合であり, R はノード間の親子関係の反射推移閉包である. 論理式 A に対して,

$$|A| = \{a \in W \mid a : A \in \Gamma\} \quad (\text{つまり } A \text{ を左辺に含むノード全体})$$

$$\|A\| = \{a \in W \mid a : A \notin \Delta\} \quad (\text{つまり } A \text{ を右辺に含まないノード全体})$$

とする. すると無矛盾性条件から必ず $|A| \subseteq \|A\|$ である. ノードの集合 α が論理式 A に対して

$$|A| \subseteq \alpha \subseteq \|A\|$$

であるとき, 「 α は A で近似される」と言う. これは次の条件と同値であることに注意: 任意のノード a に対して,

$a : A \in \Gamma$ ならば $a \in \alpha$,
 $a : A \in \Delta$ ならば $a \notin \alpha$.

そして,

$$Q = \{ \alpha \in \nabla(W) \mid \alpha \text{ はある論理式で近似される} \}$$

とする. $\langle W, R, Q \rangle$ が一般フレームになっていることは次の補題から示される.

主補題

上で定義した $\langle W, R, Q \rangle$ 上の任意の付値 V と任意の論理式 A に対して次が成り立つ. $FV(A) = \{x_1, \dots, x_n\}$ (すべて異なる) として, 各 i について $V(x_i)$ が論理式 X_i で近似されているとする (このような X_i は Q の定義から必ず存在する). このとき, もしすべての i について A 中 x_i に X_i が代入可能であるならば, $V(A)$ は $A[\vec{x} := \vec{X}]$ で近似される. ただし, $[\vec{x} := \vec{X}]$ は $x_1, \dots, x_n$ への $X_1, \dots, X_n$ の同時代入である.

[証明] A に関する帰納法. たとえば $A = \forall y B$ で $(a : A[\vec{x} := \vec{X}]) \in \Gamma$ のとき, $a \in V(\forall y B)$ を示す. このためには, 任意の $\beta \in Q$ について $a \in V_{[y:=\beta]}(B)$ を示せばよい. β を近似する論理式 Y をとる. y' を適当に (新しく) 取り, $y' \notin FV(\vec{X}, \vec{x})$ かつ $B[y := y'][y' := y] = B$ であるようにする. そして $B' = B[y := y']$ とする ($\forall y B$ と $\forall y' B'$ は名前替え同士である). さらに B' から何回かの名前替えで得られる B'' で, B'' 中 x_i と y' にそれぞれ X_i と Y が代入可能であるものを考える. ($(\forall y B)[\vec{x} := \vec{X}]$ と $\forall y'(B''[\vec{x} := \vec{X}])$ は名前替え同士である). すると無矛盾飽和の条件 (名前替え) と ($\forall$ 左) により, $(a : B''[\vec{x} := \vec{X}][y' := Y]) \in \Gamma$ である. $B''[\vec{x} := \vec{X}][y' := Y] = B''[\vec{x} := \vec{X}, y' := Y]$ であり, $V_{[y':=\beta]}(y')$ は Y で近似され, $V_{[y':=\beta]}(x_i)$ は X_i で近似されているので, 帰納法の仮定により $a \in V_{[y':=\beta]}(B'')$ となる. そして 2 節の補題から $V_{[y':=\beta]}(B'') = V_{[y:=\beta]}(B)$ が言えるので, 求めることが証明された. **[証明終わり]**

[(3) $\implies$ (2) (カット無しの完全性) の証明]

対偶を示す. カット無しでは証明不可能なシークエント $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B$ に対して, 補題「 T から $\mathbf{LJ}_{\rightarrow \wedge \forall^2}$ 」と「無矛盾飽和への拡大」によってこれを根 a に含む無矛盾飽和ツリーシークエントを作り, それから上記の一般フレームを作り, $V_0(x) = |x|$ なる付値を考えれば, 主補題によって $a \in V_0(A_1) \cap \dots \cap V_0(A_n)$, $a \notin V_0(B)$ すなわち $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B$ はこの一般フレームで恒真でない. **[証明終わり]**

4 SLACS での問題に対する解答

$A = \forall x_1 \dots \forall x_n B$ ($n \geq 0$) で B 中には $\forall$ が無いとき, A は 外全称形 であると言う. さらに $\{y_1, \dots, y_m\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ で $y_1, \dots, y_m$ はすべて異なる変数のとき, 論理式集合 Γ とそのある要素 $C_1, \dots, C_m$ に対して

$$A' = B[y_1 := C_1, \dots, y_m := C_m] \quad (\text{同時代入})$$

となっているとき, この A' を, A の Γ 代入例 (または単に 代入例) と呼ぶ. 特に $C_1, \dots, C_m$ に $\forall$ が現れないときは, $\forall$ 無し代入例 とも呼ぶ.

定理

$\mathbf{LJ}_{\rightarrow \wedge \forall^2} \vdash \Gamma, \Delta \Rightarrow A$ で Γ が外全称形の集合で Δ, A に $\forall$ が現れないならば, Γ の要素の $\forall$ 無し代入例のある集合 $\Gamma^\#$ が存在して, $\mathbf{LJ}_{\rightarrow \wedge} \vdash \Gamma^\#, \Delta \Rightarrow A$ ($\mathbf{LJ}_{\rightarrow \wedge}$ は $\rightarrow$ と $\wedge$ だけの $\mathbf{LJ}$ である).

[証明]

はじめに, $BV(\Gamma) \cap FV(\Gamma, \Delta, A)$ であると仮定してよい. (そうでないならば, 証明可能性や代入例は名前替えに対して不変なので Γ の名前替えをしたものを考えればよい.)

有限個の変数 $FV(\Gamma, \Delta, A)$ から $\rightarrow$ と $\wedge$ で作られる論理式全体を直観主義論理上の同値で割ると有限個の同値類になる (Diego の定理). その代表元を $D_1, \dots, D_d$ とし, $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_d\}$ とする. すると,

$$\Gamma^\# = \{C \mid C \text{ は } \Gamma \text{ 中の論理式の } \mathcal{D} \text{ 代入例}\}$$

が求める $\Gamma^\#$ になることを示す. このために, $(\dagger) \mathbf{LJ}_{\rightarrow, \wedge} \vdash \Gamma^\#, \Delta \Rightarrow A$ を仮定して, $\mathbf{LJ}_{\rightarrow, \wedge, \forall^2} \vdash \Gamma, \Delta \Rightarrow A$ になることを示す.

($\dagger$) と直観主義命題論理の完全性定理により, あるフレーム $\langle W, R \rangle$ ($\forall$ は無いので全称評価領域は不要) と付値 V_0 が存在して, $V_0(\wedge(\Gamma^\#, \Delta) \rightarrow A) \neq W$ となる. すなわちある $a \in W$ があって $a \in V_0(\wedge(\Gamma^\#, \Delta))$, $a \notin V_0(A)$ となっている. ここで $Q = \{V_0(D_1), \dots, V_0(D_d)\}$ として, 次の二つを示せば, $\mathbf{LJ}_{\rightarrow, \wedge, \forall^2}$ の健全性定理と合わせて証明が完了する. (1) $\langle W, R, Q \rangle$ が一般フレームであること. (2) $V_0(\wedge(\Gamma, \Delta) \rightarrow A) \neq W$

[(1) の証明] 任意の論理式 F とこのフレーム上の任意の付値 V に対して, ある i があって $V(F) = V_0(D_i)$ となることを示せばよい. これを F に関する帰納法で示す. たとえば $F = \forall x G$ のとき. $V(\forall x G) = \bigcap_{\alpha \in Q} V_{[x:=\alpha]}(G) = V_{[x:=V_0(D_1)]}(G) \cap \dots \cap V_{[x:=V_0(D_d)]}(G) = V_0(D_{a_1}) \cap \dots \cap V_0(D_{a_d})$ (帰納法の仮定からこのような $a_1, \dots, a_d$ がある) $= V_0(D_{a_1} \wedge \dots \wedge D_{a_d}) = V_0(D_b)$ (D_b は $D_{a_1} \wedge \dots \wedge D_{a_d}$ が属する同値類の代表元).

[(2) の証明] $a \in V_0(\wedge(\Gamma))$, すなわち Γ の任意の要素 $\forall x_1 \dots \forall x_n B$ に対して $a \in V_0(\forall x_1 \dots \forall x_n B)$ を示せばよい. そのためには, 任意の $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in Q$ に対して $a \in V_{0[x_1:=\alpha_1] \dots [x_n:=\alpha_n]}(B)$ を示せばよい. $x_1, \dots, x_n$ から重複して出現する変数は添字の一番大きなものだけを残して取り除いた列を $x_{p(1)}, \dots, x_{p(m)}$ とすると, $V_{0[x_1:=\alpha_1] \dots [x_n:=\alpha_n]}(B) = V_{0[x_{p(1)}:=\alpha_{p(1)}] \dots [x_{p(m)}:=\alpha_{p(m)}]}(B)$. そして, $\alpha_{p(i)} = V_0(D_{q(i)})$ ($i = 1, \dots, m$) とすると, $x_{p(i)}$ が $D_{q(j)}$ 中に現れないことなどを使って「論理式への代入と付値への代入の同値性補題」を繰り返し適用すると $V_{0[x_{p(1)}:=\alpha_{q(1)}] \dots [x_{p(m)}:=\alpha_{q(m)}]}(B) = V_0(B[\overrightarrow{x_{p(i)}} := \overrightarrow{D_{q(i)}}])$ を得る. $B[\overrightarrow{x_{p(i)}} := \overrightarrow{D_{q(i)}}]$ は B の $\mathcal{D}$ 代入例すなわち $\Gamma^\#$ の要素なので, $a \in V_0(\wedge(\Gamma^\#))$ であったことから証明完了. [証明終わり]

定理

上記の定理は $\wedge$ がなければ成り立たない. すなわち, 次の例がある.

$$(1) \quad \mathbf{LJ}_{\rightarrow, \forall^2} \vdash \forall x((x \rightarrow a) \rightarrow (x \rightarrow b) \rightarrow c) \Rightarrow c$$

であるが, (2) 論理記号が $\rightarrow$ だけのどんな論理式 $X_1, \dots, X_n$ に対しても

$$\mathbf{LJ}_{\rightarrow} \vdash (X_1 \rightarrow a) \rightarrow (X_1 \rightarrow b) \rightarrow c, \dots, (X_n \rightarrow a) \rightarrow (X_n \rightarrow b) \rightarrow c \Rightarrow c$$

である.

[証明]

(1)

$((\forall x.x) \rightarrow a) \rightarrow ((\forall x.x) \rightarrow b) \rightarrow c \Rightarrow c$ が証明できるので, これから ($\forall$ 左) で得られる. ($(\forall x.x)$ の代わりに $\forall x((a \rightarrow b \rightarrow x) \rightarrow x)$ でもよい.)

(2)

$W = \{0, 1, 2\}$ で 0 を根とする二分木 $\langle W, R \rangle$ を考える. 付値 V を $V(a) = \{1\}$, $V(b) = \{2\}$, $V(c) = \{1, 2\}$, a, b, c 以外の変数 v に対しては $V(v) = W$ とする. すると, 論理記号は $\rightarrow$ しか含まない任意の論理式 X に対して, $V(X) \in \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, W\}$ であり, $V((X \rightarrow a) \rightarrow (X \rightarrow b) \rightarrow c) = W$ となる. したがって, このフレームと付値が, $\mathbf{LJ}_{\rightarrow}$ で証明できないことを表すモデルになる. [証明終わり]