直観主義論理入門

非古典論理の証明論的研究の一例

鹿島 亮（東京工業大学 情報理工学研究科）

2006 年 8 月 31 日〜9 月 2 日 数学基礎論サマースクール

非古典論理の証明論的研究の一例として，非古典論理の代表である直観主義論理の研究のはじめの部分を紹介する．第 1 章では直観主義命題論理を，第 2 章では直観主義一階述語論理を，それぞれ扱う．直観主義二階命題論理は分量の都合で本稿では扱わないが，それについてはたとえば [6] をご覧いただきたい．

1 直観主義命題論理

1.1 論理式

$\equiv$ は「記号列として等しい」ことを表す．

直観主義命題論理の論理式は以下の記号から作られる．

1. **命題変数**．可算無限ある．$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \ldots$ などで表す．
2. **論理記号**: $\bot$，$\to$，$\wedge$，$\vee$．

論理式は以下で再帰的に定義される．

1. 命題変数は論理式である．
2. $\bot$ は論理式である．
3. A，B が論理式ならば，次の三つ：$(A{\to}B)$，$(A{\wedge}B)$，$(A{\vee}B)$ もそれぞれ論理式である．

以下では $A, B, \ldots$ などで論理式を表す．$\neg A$ を $(A{\to}\bot)$ の省略形として用いる．括弧は適宜省略する．たとえば $A{\wedge}B{\to}C{\vee}D \equiv ((A{\wedge}B){\to}(C{\vee}D))$ である．$\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ のとき，$A_1{\wedge}\cdots{\wedge}A_n$ という形の任意の論理式を $\bigwedge\Gamma$ と表記し，$A_1{\vee}\cdots{\vee}A_n$ という形の任意の論理式を $\bigvee\Gamma$ と表記する（$A_1 \ldots A_n$ の順番や括弧の掛かり方に任意性がある）．$n = 0$ の場合は，それぞれ $\bigwedge\Gamma \equiv \top$，$\bigvee\Gamma \equiv \bot$ とする．

1.2 シークエント計算

ここでは Γ, Δ 等で論理式の多重集合（各要素の有無だけでなく出現個数までも考慮した集合）を表す．特に Γ，Δ がそれぞれ論理式の有限多重集合のとき

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

という表記を <u>シークエント</u> と呼ぶ．たとえば $\Gamma, \Delta, A, B \Rightarrow C$ と書いたらこれは $\Gamma{\cup}\Delta{\cup}\{A, B\} \Rightarrow \{C\}$ のことである（$\{\}$ は多重集合，$\cup$ は多重集合の和集合を表す）．

LJ は，以下の始シークエントと推論規則で「右辺が単元集合のシークエント」を証明する体系である．

始シークエント：次の２種類

$$A \Rightarrow A \qquad \bot \Rightarrow A$$

推論規則:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Delta \Rightarrow C}{A{\to}B, \Gamma, \Delta \Rightarrow C}\ (\to\text{左}) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A{\to}B}\ (\to\text{右})$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow C}{A{\wedge}B, \Gamma \Rightarrow C}\ (\wedge\text{左}) \qquad \frac{B, \Gamma \Rightarrow C}{A{\wedge}B, \Gamma \Rightarrow C}\ (\wedge\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A{\wedge}B}\ (\wedge\text{右})$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow C \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A{\vee}B, \Gamma \Rightarrow C}\ (\vee\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A{\vee}B}\ (\vee\text{右}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A{\vee}B}\ (\vee\text{右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow B}{A, \Gamma \Rightarrow B}\ (\text{weakening}) \qquad \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow B}{A, \Gamma \Rightarrow B}\ (\text{contraction})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad A, \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow B}\ (\text{cut})$$

「**LJ** でシークエント $\Gamma \Rightarrow A$ が証明できること」と「**LJ** で cut 規則を使わずにシークエント $\Gamma \Rightarrow A$ が証明できること」をそれぞれ

$$\mathbf{LJ} \vdash \Gamma \Rightarrow A, \qquad \text{cut-free } \mathbf{LJ} \vdash \Gamma \Rightarrow A$$

と書く.

注意：

- 「論理式 A が直観主義論理で証明できる」ということは「左辺が空で右辺が A のシークエント $\Rightarrow A$ が **LJ** で証明できる」ということと等しい.
- シークエントの左辺は多重集合なので，規則

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, B, A, \Delta \Rightarrow C}\ (\text{exchange})$$

  はいつでも自動的に適用できると考えてよい.
- たとえば，$\wedge$ については，上記の規則と weakening，contraction を用いて下記の規則が実現できるし，逆に下記の規則と weakening，contraction を用いて上記の規則が実現できる.

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A{\wedge}B, \Gamma \Rightarrow C}\ (\wedge\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A{\wedge}B}\ (\wedge\text{右})$$

  したがって，これらが規則だと考えても構わない．$\to$，$\vee$ についても同様に規則の変種がある．それらの変種は今後自由に使っていく.
- 規則の中で cut だけが他と違い「前提にある論理式 (A) が，結論中には現われない場合がある」という形をしている．これは証明図を結論から逆に遡って分析しようとする際には厄介な点になる．ところが，実は cut 規則がなくても証明能力が減らないこと— カット除去定理 — が後で示される.

LJ′ は，以下の始シークエントと推論規則で「右辺が複数でも空でもよい一般のシークエント」を証明する体系である.

始シークエント：次の２種類

$$A \Rightarrow A \qquad \bot \Rightarrow$$

推論規則:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A{\to}B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (\to左) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A{\to}B}\ (\to右)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A{\wedge}B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge左) \qquad \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A{\wedge}B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge左) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A{\wedge}B}\ (\wedge右)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A{\vee}B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\vee左) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A{\vee}B}\ (\vee右) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A{\vee}B}\ (\vee右)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{weakening 左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (\text{weakening 右})$$

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{contraction 左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (\text{contraction 右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (\text{cut})$$

注意：

- **LJ′** では → 右規則だけが，**LJ** と同じ形の「シークエントの右辺が単元集合」となっている．
- **LJ′** でもカット除去定理が成り立つ．このことも後で示される．

定理 1（LJ と LJ′ との同等性）

(1) $\mathbf{LJ} \vdash \Psi \Rightarrow F$ ならば $\mathbf{LJ'} \vdash \Psi \Rightarrow F$.

(2) $\mathbf{LJ'} \vdash \Psi \Rightarrow \Phi$ ならば $\mathbf{LJ} \vdash \Psi \Rightarrow \bigvee \Phi$.

したがって，**LJ** と **LJ′** は右辺が単元集合のシークエントに関しては証明能力が等しい．

(証明)　(1) は明らか（**LJ′** の規則は **LJ** の規則を包含している）．
(2) は **LJ′** における $\Psi \Rightarrow \Phi$ の証明図に関する帰納法による．たとえば $\Psi \Rightarrow \Phi$ の証明図の最後が

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ B, \Pi \Rightarrow \Sigma\end{matrix}}{A{\to}B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (\to左)$$

となっている場合に $\mathbf{LJ} \vdash A{\to}B, \Gamma, \Pi \Rightarrow (\bigvee \Delta){\vee}(\bigvee \Sigma)$ を示すには，次のようにすればよい．ただし，以下では $\bigvee \Delta$ と $\bigvee \Sigma$ をそれぞれ単に Δ，Σ と表記する．

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \text{i.h.} \\ \Gamma \Rightarrow \Delta{\vee}A\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \text{i.h.} \\ B, \Pi \Rightarrow \Sigma\end{matrix}}{\Pi \Rightarrow B{\to}\Sigma}\ (\to 右) \qquad \dfrac{\dfrac{\Delta \Rightarrow \Delta}{\Delta \Rightarrow \Delta{\vee}\Sigma}\ (\vee 右) \qquad \dfrac{A \Rightarrow A \qquad \dfrac{B \Rightarrow B \qquad \dfrac{\Sigma \Rightarrow \Sigma}{\Sigma \Rightarrow \Delta{\vee}\Sigma}\ (\vee 右)}{B{\to}\Sigma, B \Rightarrow \Delta{\vee}\Sigma}\ (\to 左)}{A{\to}B, A, B{\to}\Sigma \Rightarrow \Delta{\vee}\Sigma}\ (\to 左)}{\Delta{\vee}A, A{\to}B, B{\to}\Sigma \Rightarrow \Delta{\vee}\Sigma}\ (\vee 左)}{\Pi, \Delta{\vee}A, A{\to}B \Rightarrow \Delta{\vee}\Sigma}\ (\text{cut})}{\Gamma, \Pi, A{\to}B \Rightarrow \Delta{\vee}\Sigma}\ (\text{cut})$$

(証明終)

1.3 LJ のカット除去

LJ のカット除去定理を「証明図を変形していく」という標準的な手法で示す.

補題 2

cut-free **LJ** において，規則

$$\dfrac{\Psi \Rightarrow X \quad X^n, \Phi \Rightarrow Y}{\Psi, \Phi \Rightarrow Y}\ (\text{general cut})$$

は admissible である．すなわち，$\Psi \Rightarrow X$ を導く cut-free **LJ** の証明図 $\mathcal{L}$ と，$X^n, \Phi \Rightarrow Y$ を導く cut-free **LJ** の証明図 $\mathcal{R}$ が存在するならば，$\Psi, \Phi \Rightarrow Y$ を導く cut-free **LJ** の証明図 $\mathcal{P}$ が存在する．ただし，X^n は論理式 X が n 個並んだものであり，n は 0 以上の任意の自然数である（Φ 中に X があっても構わない）.

(証明) 論理式 X の長さを，この general cut の degree と呼び，証明図 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ の大きさ（行数）の合計をこの general cut の rank と呼ぶ．そして，degree と rank に関する二重帰納法によって示す．すなわち,「X よりも短い論理式に対する general cut」や「X に対する general cut で，前提を導く証明図の大きさの合計が $\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ の合計より小さいもの」は admissible である，という帰納法の仮定を用いて，$\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ から $\mathcal{P}$ を作る．以下ではいくつかの場合だけについて $\mathcal{P}$ の作り方を示す.

$\mathcal{L}$ が始シークエント $X \Rightarrow X$ の場合（つまり $\Psi = \{X\}$）:

$$\begin{array}{c} \vdots\ \mathcal{R} \\ X^n, \Phi \Rightarrow Y \\ \vdots\ \text{contraction や weakening（}n\text{ の値に依る）} \\ X, \Phi \Rightarrow Y \end{array}$$

$\mathcal{L}$ が $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{L}_1\\ A, \Gamma \Rightarrow X\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{L}_2\\ B, \Gamma \Rightarrow X\end{array}}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow X}\ (\vee\text{左})$ の場合:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{L}_1\\ A, \Gamma \Rightarrow X\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{R}\\ X^n, \Phi \Rightarrow Y\end{array}}{A, \Gamma, \Phi \Rightarrow Y}\ (\text{i.h.}) \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{L}_2\\ B, \Gamma \Rightarrow X\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{R}\\ X^n, \Phi \Rightarrow Y\end{array}}{B, \Gamma, \Phi \Rightarrow Y}\ (\text{i.h.})}{A \vee B, \Gamma, \Phi \Rightarrow Y}\ (\vee\text{左})$$

$\mathcal{R}$ が $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{R}_1\\ X^n, \Phi \Rightarrow A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{R}_2\\ X^n, \Phi \Rightarrow B\end{array}}{X^n, \Phi \Rightarrow A \wedge B}\ (\wedge\text{右})$ の場合:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{L}\\ \Psi \Rightarrow X\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{R}_1\\ X^n, \Phi \Rightarrow A\end{array}}{\Psi, \Phi \Rightarrow A}\ (\text{i.h.}) \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{L}\\ \Psi \Rightarrow X\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{R}_2\\ X^n, \Phi \Rightarrow B\end{array}}{\Psi, \Phi \Rightarrow B}\ (\text{i.h.})}{\Psi, \Phi \Rightarrow A \wedge B}\ (\wedge\text{右})$$

$\mathcal{R}$ が $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{R}_0\\ X^{n+1}, \Phi \Rightarrow Y\end{array}}{X^n, \Phi \Rightarrow Y}\ (\text{contraction})$ の場合:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{L}\\ \Psi \Rightarrow X\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{R}_0\\ X^{n+1}, \Phi \Rightarrow Y\end{array}}{\Psi, \Phi \Rightarrow Y}\ (\text{i.h})$$

$\mathcal{L}$ が $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{L}_0\\ A,\Psi\Rightarrow B\end{array}}{\Psi\Rightarrow A{\to}B}\,(\to\text{右})$，$\mathcal{R}$ が $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{R}_1\\ X^a,\Gamma\Rightarrow A\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{R}_2\\ B,X^b,\Delta\Rightarrow Y\end{array}}{A{\to}B,X^{a+b},\Gamma,\Delta\Rightarrow Y}\,(\to\text{左})$ の場合（つまり $X\equiv A{\to}B$，$n=a+b+1$）：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{L}\\ \Psi\Rightarrow X\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{R}_1\\ X^a,\Gamma\Rightarrow A\end{array}}{\Psi,\Gamma\Rightarrow A}\,(\text{i.h.})\qquad\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{L}_0\\ A,\Psi\Rightarrow B\end{array}\quad\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{L}\\ \Psi\Rightarrow X\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\ \mathcal{R}_2\\ B,X^b,\Delta\Rightarrow Y\end{array}}{\Psi,B,\Delta\Rightarrow Y}\,(\text{i.h.})}{A,\Psi,\Delta\Rightarrow Y}\,(\text{i.h. および contraction})}{\Psi,\Gamma,\Delta\Rightarrow Y}\,(\text{i.h. および contraction})$$

(証明終)

定理 3（LJ のカット除去定理）

LJ $\vdash\ \Psi\Rightarrow F$ ならば cut-free **LJ** $\vdash\ \Psi\Rightarrow F$.

(証明)　$\Psi\Rightarrow F$ を導く **LJ** の証明図に関する帰納法による．最後の規則が cut のときに補題 2 を用いる（general cut は $n=1$ にすれば cut になる）．　**(証明終)**

カット除去定理の有名な応用例を二つ挙げておく．

定理 4（直観主義命題論理の disjunction property）

LJ $\vdash\Rightarrow A{\vee}B$ ならば，**LJ** $\vdash\Rightarrow A$ または **LJ** $\vdash\Rightarrow B$ が成り立つ．

(証明)　**LJ** $\vdash\Rightarrow A{\vee}B$ ならばカット除去定理によって cut-free **LJ** $\vdash\Rightarrow A{\vee}B$ である．この cut-free **LJ** の証明の最後の部分は

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Rightarrow A\end{array}}{\Rightarrow A{\vee}B}\,(\vee\text{右})\qquad\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Rightarrow B\end{array}}{\Rightarrow A{\vee}B}\,(\vee\text{右})$$

のどちらかの形をしているはずである（他の規則は $\Rightarrow A{\vee}B$ を結論として導くことはできない）．したがって $\Rightarrow A$ か $\Rightarrow B$ は **LJ** で証明されている．　**(証明終)**

定理 5（直観主義命題論理の interpolation property）

LJ $\vdash\Rightarrow A{\to}B$ ならば，次を満たす論理式 I が存在する

- **LJ** $\vdash\Rightarrow A{\to}I$.
- **LJ** $\vdash\Rightarrow I{\to}B$.
- $\mathrm{PV}(I)\subseteq\mathrm{PV}(A)\cap\mathrm{PV}(B)$.

ただし $\mathrm{PV}(X)$ は X 中に現れる命題変数の集合である．

この定理を示すための補題が次のものである：

補題 6

cut-free $\mathbf{LJ} \vdash \Psi_1, \Psi_2 \Rightarrow F$ ならば，次を満たす論理式 I が存在する

- cut-free $\mathbf{LJ} \vdash \Psi_1 \Rightarrow I$.
- cut-free $\mathbf{LJ} \vdash I, \Psi_2 \Rightarrow F$.
- $\mathrm{PV}(I) \subseteq \mathrm{PV}(\Psi_1) \cap \mathrm{PV}(\Psi_2, F)$.

(証明) cut-free $\mathbf{LJ}$ における $\Psi_1, \Psi_2 \Rightarrow F$ の証明（これを $\mathcal{P}$ と呼ぶ）に関する帰納法による．

$\mathcal{P}$ が始シークエント $F \Rightarrow F$ で，$\Psi_1 = \{F\}$，$\Psi_2 = \{\}$ のとき．$I \equiv F$ とすればよい．

$\mathcal{P}$ が始シークエント $F \Rightarrow F$ で，$\Psi_1 = \{\}$，$\Psi_2 = \{F\}$ のとき．$I \equiv \top$ とすればよい．

$\mathcal{P}$ が $\dfrac{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \quad B, \Delta_1, \Delta_2 \Rightarrow F}{\underbrace{\Gamma_1, \Delta_1,}_{\Psi_1} \underbrace{A{\to}B, \Gamma_2, \Delta_2}_{\Psi_2} \Rightarrow F}\ (\to 左)$ のとき．帰納法の仮定によって次のような J，K が存在する．

- cut-free $\mathbf{LJ} \vdash \Gamma_1 \Rightarrow J$.
- cut-free $\mathbf{LJ} \vdash J, \Gamma_2 \Rightarrow A$.
- $\mathrm{PV}(J) \subseteq \mathrm{PV}(\Gamma_1) \cap \mathrm{PV}(\Gamma_2, A)$.
- cut-free $\mathbf{LJ} \vdash \Delta_1 \Rightarrow K$.
- cut-free $\mathbf{LJ} \vdash K, B, \Delta_2 \Rightarrow F$.
- $\mathrm{PV}(K) \subseteq \mathrm{PV}(\Delta_1) \cap \mathrm{PV}(B, \Delta_2, F)$.

すると，$I \equiv J{\wedge}K$ とすればよい．なぜなら：

$$\dfrac{\Gamma_1 \Rightarrow J \quad \Delta_1 \Rightarrow K}{\Gamma_1, \Delta_1 \Rightarrow J{\wedge}K}\ (\wedge 右) \qquad \dfrac{\dfrac{J, \Gamma_2 \Rightarrow A \quad K, B, \Delta_2 \Rightarrow F}{A{\to}B, J, \Gamma_2, K, \Delta_2 \Rightarrow F}\ (\to 左)}{J{\wedge}K, A{\to}B, \Gamma_2, \Delta_2 \Rightarrow F}\ (\wedge 左)$$

$$\mathrm{PV}(J{\wedge}K) \subseteq \mathrm{PV}(\Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathrm{PV}(\Gamma_2, A, B, \Delta_2, F)$$

$\mathcal{P}$ が $\dfrac{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \quad B, \Delta_1, \Delta_2 \Rightarrow F}{\underbrace{A{\to}B, \Gamma_1, \Delta_1,}_{\Psi_1} \underbrace{\Gamma_2, \Delta_2}_{\Psi_2} \Rightarrow F}\ (\to 左)$ のとき．帰納法の仮定によって次のような J，K が存在する．

- cut-free $\mathbf{LJ} \vdash \Gamma_2 \Rightarrow J$.
- cut-free $\mathbf{LJ} \vdash J, \Gamma_1 \Rightarrow A$.
- $\mathrm{PV}(J) \subseteq \mathrm{PV}(\Gamma_2) \cap \mathrm{PV}(\Gamma_1, A)$.
- cut-free $\mathbf{LJ} \vdash B, \Delta_1 \Rightarrow K$.
- cut-free $\mathbf{LJ} \vdash K, \Delta_2 \Rightarrow F$.

- $\mathrm{PV}(K) \subseteq \mathrm{PV}(B, \Delta_1) \cap \mathrm{PV}(\Delta_2, F)$.

すると，$I \equiv J{\to}K$ とすればよい．なぜなら：

$$\dfrac{\dfrac{J, \Gamma_1 \Rightarrow A \quad B, \Delta_1 \Rightarrow K}{A{\to}B, J, \Gamma_1, \Delta_1 \Rightarrow K}\,(\to 左)}{A{\to}B, \Gamma_1, \Delta_1 \Rightarrow J{\to}K}\,(\to 右) \qquad \dfrac{\Gamma_2 \Rightarrow J \quad K, \Delta_2 \Rightarrow F}{J{\to}K, \Gamma_2, \Delta_2 \Rightarrow F}\,(\to 左)$$

$$\mathrm{PV}(J{\to}K) \subseteq \mathrm{PV}(\Gamma_1, A, B, \Delta_1) \cap \mathrm{PV}(\Gamma_2, \Delta_2, F)$$

他の場合も同様．　**(証明終)**

(定理 5 の証明)　$\mathbf{LJ} \vdash \Rightarrow A{\to}B$ ならば，カット除去定理によって cut-free $\mathbf{LJ} \vdash A \Rightarrow B$ が言える．そこで補題 6 を $\Psi_1 = \{A\}$，$\Psi_2 = \{\}$，$F \equiv B$ として適用すると，求める I が得られる．　**(証明終)**

1.4　クリプキモデル

直観主義論理の意味論としてよく用いられるクリプキモデルを導入して，$\mathbf{LJ}'$ および cut-free $\mathbf{LJ}'$ の健全性・完全性を示す．これらから $\mathbf{LJ}'$ のカット除去も導かれる．

W が非空集合で，$\rightsquigarrow$ が W 上の反射推移的関係（すなわち,「$x \rightsquigarrow x$」「$x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z$ ならば $x \rightsquigarrow z$」を満たす）のとき，W と $\rightsquigarrow$ の組 $\langle W, \rightsquigarrow \rangle$ を クリプキフレーム と言い，W と $\rightsquigarrow$ をそれぞれ 可能世界集合，到達可能関係 と言う．

クリプキフレーム上の解釈とは，各命題変数の各可能世界での真偽を定めるものである．解釈 $\mathcal{I}$ による命題変数 $\mathbf{p}$ の可能世界 w での真偽（True か False の必ずどちらか）を $\mathbf{p}^{\mathcal{I}}_w$ と書く．なお，解釈は次の 遺伝性 を満たしていなければならない：

$(\mathbf{p}^{\mathcal{I}}_w = \mathsf{True}$ かつ $w \rightsquigarrow y)$ ならば $\mathbf{p}^{\mathcal{I}}_y = \mathsf{True}$.

クリプキフレームと解釈とを合わせた $M = \langle W, \rightsquigarrow, \mathcal{I} \rangle$ という組を クリプキモデル と呼ぶ．この M において，論理式 A と可能世界 w についての

$w \models A$

（「w で A が成り立つ」と読む）という関係を，A に関して帰納的に定義する．

$w \models \mathbf{p} \iff \mathbf{p}^{\mathcal{I}}_w = \mathsf{True}$.

$w \not\models \bot$.

$w \models A{\to}B \iff \forall y \in W\ \Big((w \rightsquigarrow y$ かつ $y \models A)$ ならば $y \models B\Big)$

$w \models A{\wedge}B \iff w \models A$ かつ $w \models B$.

$w \models A{\vee}B \iff w \models A$ または $w \models B$.

定理 7（遺伝性）

任意のクリプキモデル $\langle W, \rightsquigarrow, \mathcal{I} \rangle$ と任意の論理式 A に対して，次が成り立つ．

$(x \models A$ かつ $x \rightsquigarrow y)$ ならば $y \models A$.

(証明)　A に関する帰納法による．　**(証明終)**

定理 8（LJ′の健全性）

$\mathbf{LJ}' \vdash \ \Psi \Rightarrow \Phi$ ならば，任意のクリプキモデル $\langle W, \rightsquigarrow, \mathcal{I} \rangle$ と任意の可能世界 $x \in W$ に対して次が成り立つ．

(†) ある $F \in \Psi$ が存在して $x \not\models F$，またはある $F \in \Phi$ が存在して $x \models F$.

(証明)　$\Psi \Rightarrow \Phi$ の証明に関する帰納法によって，任意の $x \in W$ に対して (†) が成り立つことを示す．以下ではふたつの場合だけ示す．

$\Psi \Rightarrow \Phi$ の証明の最後が $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ B, \Pi \Rightarrow \Sigma\end{array}}{A \to B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$ (→ 左) のとき．左上式の帰納法の仮定により次の (L1)〜(L3) のいずれかは成り立つ．

(L1) ある $F \in \Gamma$ が存在して $x \not\models F$.

(L2) ある $F \in \Delta$ が存在して $x \models F$.

(L3) $x \models A$.

また右上式の帰納法の仮定により次の (R1)〜(R3) のいずれかは成り立つ．

(R1) $x \not\models B$.

(R2) ある $F \in \Pi$ が存在して $x \not\models F$.

(R3) ある $F \in \Sigma$ が存在して $x \models F$.

(L1)(L2)(R2)(R3) のいずれかが成り立つ場合は，(†) がそのまま成り立つ．(L3) と (R1) が同時に成り立つ場合は $x \not\models A \to B$ になっている（$\rightsquigarrow$ の反射性：$x \rightsquigarrow x$ を用いている）ので，(†) が成り立つ．

$\Psi \Rightarrow \Phi$ の証明の最後が $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A, \Gamma \Rightarrow B\end{array}}{\Gamma \Rightarrow A \to B}$ (→ 右) のとき．$x \models A \to B$ ならば (†) が成り立っている．$x \not\models A \to B$ ならば，定義により

$x \rightsquigarrow y$，$y \models A$，$y \not\models B$

となる y が存在する．帰納法の仮定によって，この y に対して次の (1)〜(3) のいずれかは成り立つ．

(1) $y \not\models A$.

(2) ある $F \in \Gamma$ が存在して $y \not\models F$.

(3) $y \models B$.

(1) と (3) は上で否定されているので，(2) が成り立つ．したがって遺伝性（定理 7）によって「ある $F \in \Gamma$ が存在して $x \not\models F$」であり，(†) が成り立つ． **(証明終)**

シークエント $\Psi \Rightarrow \Phi$ が任意の論理式 A, B に対して以下のすべての条件を満たすとき，これを「cut-free 証明不可能飽和シークエント」と呼ぶ

（cut-free 証明不可能性） cut-free $\mathbf{LJ}' \not\vdash \Psi \Rightarrow \Phi$.
（$\rightarrow$ 左条件） $A{\rightarrow}B \in \Psi$ ならば，$A \in \Phi$ または $B \in \Psi$.
（$\wedge$ 左条件） $A{\wedge}B \in \Psi$ ならば，$A \in \Psi$ かつ $B \in \Psi$.
（$\wedge$ 右条件） $A{\wedge}B \in \Phi$ ならば，$A \in \Phi$ または $B \in \Phi$.
（$\vee$ 左条件） $A{\vee}B \in \Psi$ ならば，$A \in \Psi$ または $B \in \Psi$.
（$\vee$ 右条件） $A{\vee}B \in \Phi$ ならば，$A \in \Phi$ かつ $B \in \Phi$.

補題 9

cut-free $\mathbf{LJ}' \not\vdash \Psi \Rightarrow \Phi$ ならば，$\Psi \subseteq \Psi^+$，$\Phi \subseteq \Phi^+$ なる cut-free 証明不可能飽和シークエント $\Psi^+ \Rightarrow \Phi^+$ が存在する．

(証明) Ψ, Φ 中のすべての部分論理式が無限回出現する論理式列をひとつ作りそれを

$F_1, F_2, \ldots$

とする．たとえば $\Big(\Psi \Rightarrow \Phi\Big) = \Big(\mathbf{p}{\rightarrow}(\mathbf{p}{\rightarrow}\mathbf{q}) \Rightarrow \mathbf{p}{\wedge}\mathbf{q}\Big)$ で $\mathbf{p}$，$\mathbf{q}$ が命題変数ならば，

$\mathbf{p}{\rightarrow}(\mathbf{p}{\rightarrow}\mathbf{q}) \equiv F_1 \equiv F_6 \equiv F_{11} \equiv \cdots$
$\mathbf{p}{\rightarrow}\mathbf{q} \equiv F_2 \equiv F_7 \equiv F_{12} \equiv \cdots$
$\mathbf{p} \equiv F_3 \equiv F_8 \equiv F_{13} \equiv \cdots$
$\mathbf{q} \equiv F_4 \equiv F_9 \equiv F_{14} \equiv \cdots$
$\mathbf{p}{\wedge}\mathbf{q} \equiv F_5 \equiv F_{10} \equiv F_{15} \equiv \cdots$

とすればよい．そしてシークエントの列 $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$ で各 i について cut-free $\mathbf{LJ}' \not\vdash \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ であるものを，i に関して帰納的に以下で定義する．

- $i = 0$ のとき．

  $$(\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0) \equiv (\Psi \Rightarrow \Phi).$$

  これは補題の前提から cut-free $\mathbf{LJ}'$ で証明不可能である．

- $\Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}$ がすでに定義され cut-free $\mathbf{LJ}' \not\vdash \Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}$ であるとき，$\Gamma_k \Rightarrow \Delta_k$ を次で定義する．

  – F_k が $A{\rightarrow}B$ という形で Γ_{k-1} に含まれるとき．

  $$(\Gamma_k \Rightarrow \Delta_k) \equiv (\Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}, A) \text{ または } (B, \Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}).$$

  $\rightarrow$ 左と contraction 規則があるのでこれらの少なくとも一方は cut-free $\mathbf{LJ}'$ で証明不可能となる．そこで証明不可能な方を $(\Gamma_k \Rightarrow \Delta_k)$ と定義する．

  – F_k が $A{\wedge}B$ という形で Γ_{k-1} に含まれるとき．

  $$(\Gamma_k \Rightarrow \Delta_k) \equiv (A, B, \Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}).$$

  $\wedge$ 左と contraction 規則があるのでこれも cut-free $\mathbf{LJ}'$ で証明不可能である．

– F_k が $A{\wedge}B$ という形で Δ_{k-1} に含まれるとき．

$$(\Gamma_k \Rightarrow \Delta_k) \equiv (\Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}, A) \text{ または } (\Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}, B).$$

$\wedge$ 右と contraction 規則があるのでこれらの少なくとも一方は cut-free **LJ′**で証明不可能となる．そこで証明不可能な方を $(\Gamma_k \Rightarrow \Delta_k)$ と定義する．

– F_k が $A{\vee}B$ という形で Γ_{k-1} や Δ_{k-1} に含まれるときは，$A{\wedge}B$ のときと同様（双対）．

– 以上のどの条件にも合わない場合は

$$(\Gamma_k \Rightarrow \Delta_k) \equiv (\Gamma_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1}).$$

$F_i(i = 1, 2, \ldots)$ に現れる論理式の種類は有限なので，上記の構成においてある i よりも先では $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ に新規の要素は付け加わらなくなる．すなわち，ある n が存在して，

$$\forall i \geq n \ (\Gamma_i \text{ と } \Gamma_n \text{ は集合として等しく，} \Delta_i \text{ と } \Delta_n \text{ は集合として等しい})$$

が成り立つ．この $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ が求める cut-free 証明不可能飽和シークエントになっている．　**(証明終)**

定理 10（cut-free LJ′の完全性）

cut-free **LJ′** $\nvdash$ $\Psi \Rightarrow \Phi$ ならば，あるクリプキモデル $\langle W, \rightsquigarrow, \mathcal{I} \rangle$ とある可能世界 $x \in W$ が存在して，次が成り立つ．

すべての $F \in \Psi$ について $x \models F$ であり，かつすべての $F \in \Phi$ について $x \not\models F$ である．

(証明)　求めるクリプキモデル $\langle W, \rightsquigarrow, \mathcal{I} \rangle$ を次で定義する．

- cut-free 証明不可能飽和シークエント全体の集合を W とする（つまり，ひとつひとつの cut-free 証明不可能飽和シークエントがそれぞれ可能世界になっている）．
- $(\Gamma \Rightarrow \Delta) \rightsquigarrow (\Pi \Rightarrow \Sigma) \iff \Gamma \subseteq \Pi.$
- $\mathbf{p}^{\mathcal{I}}_{(\Gamma \Rightarrow \Delta)} = \mathsf{True} \iff \mathbf{p} \in \Gamma.$

これがクリプキモデルの条件：

W は非空，$\rightsquigarrow$ は反射推移的，$\mathcal{I}$ は遺伝的，

を満たすことはすぐにわかる．ここで，任意の論理式 X と，W の任意の要素 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に対して次が成り立つ．

$X \in \Gamma$ ならば $(\Gamma \Rightarrow \Delta) \models X$.
$X \in \Delta$ ならば $(\Gamma \Rightarrow \Delta) \not\models X$.

これは X に関する帰納法で次のように示される．

- $X \equiv \mathbf{p}$（命題変数）で $X \in \Gamma$ のとき．$\mathcal{I}$ の定義から $(\Gamma \Rightarrow \Delta) \models \mathbf{p}$ となる．
- $X \equiv \mathbf{p}$ で $X \in \Delta$ のとき．もしも $\mathbf{p} \in \Gamma$ かつ $\mathbf{p} \in \Delta$ ならば，cut-free **LJ′** $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ になってしまう．したがって $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の cut-free 証明不可能性から $\mathbf{p} \notin \Gamma$ であり，$\mathcal{I}$ の定義から $(\Gamma \Rightarrow \Delta) \not\models \mathbf{p}$ となる．

- $X \equiv A{\to}B$ で $X \in \varGamma$ のとき．$\models A{\to}B$ の付値の定義に照らして，$(\varGamma \Rightarrow \varDelta) \rightsquigarrow (\varPi \Rightarrow \varSigma)$ なる任意の $(\varPi \Rightarrow \varSigma) \in W$ に対して，

  $(\varPi \Rightarrow \varSigma) \models A$ ならば $(\varPi \Rightarrow \varSigma) \models B$

  を示せばよい．$\rightsquigarrow$ の定義から $X \in \varPi$ となり，$\varPi \Rightarrow \varSigma$ の飽和性（$\to$ 左条件）から

  $A \in \varSigma$ または $B \in \varPi$

  となっている．したがって，帰納法の仮定から

  $(\varPi \Rightarrow \varSigma) \not\models A$ または $(\varPi \Rightarrow \varSigma) \models B$

  である．

- $X \equiv A{\to}B$ で $X \in \varDelta$ のとき．このとき cut-free $\mathbf{LJ'} \nvdash A, \varGamma \Rightarrow B$ である．なぜなら，このシークエントから $\to$ 右規則と weakening 右規則で $\varGamma \Rightarrow \varDelta$ が導かれるから．すると補題 9 によって，$\{A\} \cup \varGamma \subseteq \varPi$，$\{B\} \subseteq \varSigma$，なる $(\varPi \Rightarrow \varSigma) \in W$ が存在する．そして，$\rightsquigarrow$ の定義から $(\varGamma \Rightarrow \varDelta) \rightsquigarrow (\varPi \Rightarrow \varSigma)$ であり，帰納法の仮定から $(\varPi \Rightarrow \varSigma) \models A$ かつ $(\varPi \Rightarrow \varSigma) \not\models B$ になるので，定義から $(\varGamma \Rightarrow \varDelta) \not\models A{\to}B$ となる．

- $X \equiv A{\wedge}B$ または $A{\vee}B$ または $\bot$ のときも同様（あるいはもっと簡単）．

さて，定理の前提で与えられた $\varPsi \Rightarrow \varPhi$ に対して，補題9を用いて $\varPsi^+ \Rightarrow \varPhi^+$ を得ると，$(\varPsi^+ \Rightarrow \varPhi^+) \in W$ であり，これが求める可能世界 x であることが，上で示されている．　**(証明終)**

定理 8，10 から次が言える．

系 11（LJ′の完全性・健全性・カット除去）

以下の三条件は同値である．

- $\mathbf{LJ'} \vdash\ \varPsi \Rightarrow \varPhi$.
- cut-free $\mathbf{LJ'} \vdash\ \varPsi \Rightarrow \varPhi$.
- 任意のクリプキモデル $\langle W, \rightsquigarrow, \mathcal{I} \rangle$ と任意の可能世界 $x \in W$ に対して次が成り立つ．

  ある $F \in \varPsi$ が存在して $x \not\models F$，または，ある $F \in \varPhi$ が存在して $x \models F$.

さらに定理 1，3 とも合わせると，次が言える．

系 12

以下の五条件は同値である．

- $\mathbf{LJ} \vdash\ \Rightarrow A$.
- cut-free $\mathbf{LJ} \vdash\ \Rightarrow A$.
- $\mathbf{LJ'} \vdash\ \Rightarrow A$.
- cut-free $\mathbf{LJ'} \vdash\ \Rightarrow A$.
- 任意のクリプキモデルの任意の可能世界で A が成り立つ．

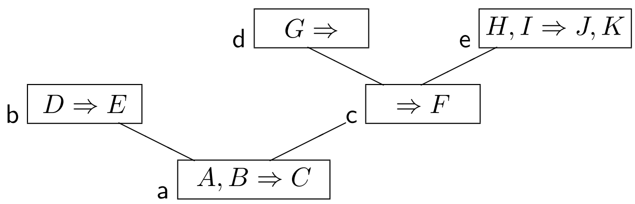
1.5 ツリーシークエント計算

Int $\vdash A$ で,「直観主義命題論理の証明体系で論理式 A が証明できること」を表す．**Int** の実際の取り方（たとえば **LJ**，**LJ**$'$や，他にも自然演繹やヒルベルト流でもよい）は問わないことにして，**Int** の完全性：

任意のクリプキモデルの任意の可能世界で A が成り立つのならば，**Int** $\vdash A$

を示すための「ツリーシークエント」を用いる方法を説明する．これは 1.4 節の方法と似ているが微妙に異なる．この方法の有効性については，第 2 章の最後で説明する．

ツリーシークエントとは，シークエントが有限木状につながった次のような図形である．



a〜e はノードの名前であり，この場合は a が根であり，ノードをつなぐ線が下から上へ「親子関係」を表す．樹状に書くと大変なので，これをラベル付き論理式を使って次のように一行につぶして書く．

$$\mathsf{a}:A,\ \mathsf{a}:B,\ \mathsf{b}:D,\ \mathsf{d}:G,\ \mathsf{e}:H,\ \mathsf{e}:I \Rightarrow \mathsf{a}:C,\ \mathsf{b}:E,\ \mathsf{c}:F,\ \mathsf{e}:J,\ \mathsf{e}:K$$

注意：この方法では「論理式が入っていない空のノード」を表現することができないので，正確な議論のためにはもっと適切な表現が必要である．

TLJ は以下の始シークエントと推論規則でツリーシークエントを証明する体系である．(以下で Γ, Δ 等はラベル付き論理式の多重集合，a, b 等はノードの名前（ラベル）である.）

始シークエント：「両辺に同じ論理式が含まれるノード」があるツリーシークエント，および,「左辺に $\perp$ が含まれるノード」があるツリーシークエント．つまり次の 2 種類

$$\mathsf{a}:A,\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\ \mathsf{a}:A \qquad \text{および} \qquad \mathsf{a}:\perp,\ \Gamma \Rightarrow \Delta$$

推論規則：

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \mathsf{a}:A \qquad \mathsf{a}:B,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathsf{a}:A{\to}B,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\to\text{左}) \qquad \frac{\mathsf{b}:A,\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\ \mathsf{b}:B}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \mathsf{a}:A{\to}B}\ (\to\text{右})^{(*)}$$

(*) ただし b は a の子で，b は子を持たず，b の中身は左辺の A と右辺の B だけ．下式では,ノード b は存在しない（空のノードとして存在するのではない）.

$$\frac{\mathsf{a}:A,\ \mathsf{a}:B,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathsf{a}:A{\wedge}B,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \mathsf{a}:A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta,\ \mathsf{a}:B}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \mathsf{a}:A{\wedge}B}\ (\wedge\text{右})$$

$$\frac{\mathsf{a}:A,\ \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \mathsf{a}:B,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathsf{a}:A{\vee}B,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\vee\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \mathsf{a}:A,\ \mathsf{a}:B}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \mathsf{a}:A{\vee}B}\ (\vee\text{右})$$

$$\frac{\mathsf{a}:A,\ \mathsf{a}:A,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathsf{a}:A,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{contraction 左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \mathsf{a}:A,\ \mathsf{a}:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \mathsf{a}:A}\ (\text{contraction 右})$$

$$\frac{\mathsf{b}:A,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathsf{a}:A,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{遺伝性})^{(**)}$$

(**) ただし b は a の子．下式にラベル b を持つ論理式が存在しなくなる場合には，下式にノード b が空のノードとして存在する.

注意：**TLJ** には cut 規則が無い．

ツリーシークエントの論理式への翻訳を与える．まず，ラベル付き論理式の多重集合 Γ とラベル a に対して，「Γ 中でラベル a が付いている論理式の多重集合」を Γ_{a} と表記する．すなわち，

$$\Gamma_{\mathsf{a}} \;=\; \{A \mid (\mathsf{a} : A) \in \Gamma\}$$

である．そして，ツリーシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ とノード a に対して，論理式 $[\![\Gamma \Rightarrow \Delta]\!]_{\mathsf{a}}$ を次の形の論理式として再帰的に定義する．

$$[\![\Gamma \Rightarrow \Delta]\!]_{\mathsf{a}} \quad \equiv \quad \bigwedge(\Gamma_{\mathsf{a}}) \to \bigvee\Big(\Delta_{\mathsf{a}},\ [\![\Gamma \Rightarrow \Delta]\!]_{\mathsf{b}_1}, \ldots, [\![\Gamma \Rightarrow \Delta]\!]_{\mathsf{b}_k}\Big)$$

ただし，$\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{b}_k$ は a のすべての子である．

例：
この節のはじめに登場した樹状に表現されたツリーシークエントを $\Gamma \Rightarrow \Delta$ とすると，以下の論理式は $[\![\Gamma \Rightarrow \Delta]\!]_{\mathsf{a}}$ である．

$$A{\wedge}B \to C \vee \Big(D{\to}E\Big) \vee \Big(\top \to F \vee (G{\to}\bot) \vee (H{\wedge}I{\to}J{\vee}K)\Big)$$

証明体系 **Int** を適切に定めれば次が成り立つ．

定理 13（TLJ から Int へ）

TLJ $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば，根のラベル a に対して **Int** $\vdash [\![\Gamma \Rightarrow \Delta]\!]_{\mathsf{a}}$ である.（したがって，根の右辺に論理式 A がひとつあるだけでそれ以外にはノードも論理式も持たないツリーシークエントが **TLJ** で証明できるならば，A は **Int** で証明できる.）

(証明)　**TLJ** における $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明に関する帰納法による．　**(証明終)**

ツリーシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$（ただし一般にこれは無限ツリーシークエント—ノード全体や各ノード内の論理式が無限—である）が以下のすべての条件を満たすとき，これを「無矛盾飽和ツリーシークエント」と呼ぶ．

（無矛盾性）　$(\mathsf{a} : A) \in \Gamma$ ならば $(\mathsf{a} : A) \notin \Delta$．および，$(\mathsf{a} : \bot) \notin \Gamma$.
（$\to$ 左条件）　$(\mathsf{a} : A{\to}B) \in \Gamma$ ならば，$(\mathsf{a} : A) \in \Delta$ または $(\mathsf{a} : B) \in \Gamma$.
（$\to$ 右条件）　$(\mathsf{a} : A{\to}B) \in \Delta$ ならば，a のある子 b について $(\mathsf{b} : A) \in \Gamma$ かつ $(\mathsf{b} : B) \in \Delta$.
（$\wedge$ 左条件）　$(\mathsf{a} : A{\wedge}B) \in \Gamma$ ならば，$(\mathsf{a} : A) \in \Gamma$ かつ $(\mathsf{a} : B) \in \Gamma$.
（$\wedge$ 右条件）　$(\mathsf{a} : A{\wedge}B) \in \Delta$ ならば，$(\mathsf{a} : A) \in \Delta$ または $(\mathsf{a} : B) \in \Delta$.
（$\vee$ 左条件）　$(\mathsf{a} : A{\vee}B) \in \Gamma$ ならば，$(\mathsf{a} : A) \in \Gamma$ または $(\mathsf{a} : B) \in \Gamma$.
（$\vee$ 右条件）　$(\mathsf{a} : A{\vee}B) \in \Delta$ ならば，$(\mathsf{a} : A) \in \Delta$ かつ $(\mathsf{a} : B) \in \Delta$.
（遺伝性）　$(\mathsf{a} : A) \in \Gamma$ で b が a の子ならば，$(\mathsf{b} : A) \in \Gamma$.

補題 14

TLJ $\nvdash \Psi \Rightarrow \Phi$ ならば，$\Psi \subseteq \Psi^+$，$\Phi \subseteq \Phi^+$ なる無矛盾飽和ツリーシークエント $\Psi^+ \Rightarrow \Phi^+$ が存在する．

(証明) 補題 9 の証明と同じように，証明不可能性を保ちながら，ツリーを生長（各ノードへの論理式の追加と新しいノードの追加）させていき，その極限（無限和）が求める無矛盾飽和ツリーシークエントになる． **(証明終)**

定理 15（ TLJ の完全性）

根の右辺に論理式 A がひとつあるだけでそれ以外にはノードも論理式も持たないツリーシークエント $\Rightarrow \mathsf{r} : A$ が **TLJ** で証明できないならば，あるクリプキモデル $\langle W, \rightsquigarrow, \mathcal{I} \rangle$ とある可能世界 $x \in W$ が存在して $x \not\models A$ である．

(証明) 補題 14 を用いて $\Rightarrow \mathsf{r} : A$ を拡大した無矛盾飽和ツリーシークエント $\mathcal{T} \equiv (\Psi^+ \Rightarrow \Phi^+)$ を得る．そして求めるクリプキモデル $\langle W, \rightsquigarrow, \mathcal{I} \rangle$ を次で定義する．

- $\mathcal{T}$ のノード全体の集合を W とする．
- ノード間の親子関係の反射推移閉包を $\rightsquigarrow$ とする．
- $\mathbf{p}_{\mathsf{a}}^{\mathcal{I}} = \mathsf{True} \iff (\mathsf{a} : \mathbf{p}) \in \Psi^+$ （つまり，$\mathcal{T}$ のノード a の左辺に $\mathbf{p}$ が含まれる）．

すると，任意の論理式 X と $\mathcal{T}$ の任意のノード a に対して次が成り立つ．

X が a の左辺に存在すれば，$\mathsf{a} \models X$．
X が a の右辺に存在すれば，$\mathsf{a} \not\models X$．

したがって，根 r について $\mathsf{r} \not\models A$ である．(詳細は定理 10 の証明と同様.） **(証明終)**

定理 13，15 から次が導かれる．

系 16（ Int の完全性）

任意のクリプキモデルの任意の可能世界で A が成り立つのであれば，$\mathbf{Int} \vdash A$ である．

2 直観主義一階述語論理

第 1 章の内容を一階述語論理へ拡張することの概要を解説する．

2.1 論理式

直観主義一階述語論理の論理式は以下の記号から作られる．

1. **自由変数**．可算無限ある．$a, b, \ldots$ 等で表す．
2. **束縛変数**．可算無限ある．$x, y, \ldots$ 等で表す．
3. **定数**．有限または可算無限ある．$\mathbf{c}, \mathbf{d}, \ldots$ 等で表す．
4. **述語**．有限または可算無限ある．$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \ldots$ 等で表す．各述語には，0 以上有限の引数の個数が決まっている．
5. **論理記号**：$\bot$，$\to$，$\wedge$，$\vee$，$\forall$．$\exists$．

注意：議論を簡単にするために関数記号や等号は持たない．

自由変数および定数のことを 項 と呼ぶ．以後，項は t などで表す．

論理式は以下で再帰的に定義される．

1. $\mathbf{p}$ が n 引数述語記号で $t_1, \ldots, t_n$ が項ならば，$\mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n)$ は論理式である．
2. $\bot$ は論理式である．
3. A，B が論理式ならば，次の三つ：$(A{\to}B)$，$(A{\wedge}B)$，$(A{\vee}B)$ もそれぞれ論理式である．
4. A が論理式，x が A 中に出現しない束縛変数，a が自由変数ならば，次の二つ：$(\forall x A[x/a])$，$(\exists x A[x/a])$ もそれぞれ論理式である．ただし，$[x/a]$ は a を x で置き換える代入操作を表す.（「x が A 中に出現しない」という条件は，同一の束縛変数の有効範囲が重複することを避けるためについている.）

A 中に出現する自由変数の集合を $\mathrm{FV}(A)$ と書く．自由変数の出現しない論理式を 閉論理式 と呼ぶ．

2.2 シークエント計算

直観主義一階述語論理のシークエント計算 **LJQ** は直観主義命題論理のシークエント計算 **LJ**（を一階述語論理の論理式に適用したもの）にさらに次の規則を加えて得られる．ただし，以下で t は任意の項であり，x は A 中に出現しない束縛変数である（これは，$\forall x A[x/a]$ や $\exists x A[x/a]$ が論理式になるための条件である）．

$$\frac{A[t/a], \Gamma \Rightarrow B}{\forall x A[x/a], \Gamma \Rightarrow B}\ (\forall 左) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[b/a]}{\Gamma \Rightarrow \forall x A[x/a]}\ (\forall 右)^{(\dagger)}$$

$$\frac{A[b/a], \Gamma \Rightarrow B}{\exists x A[x/a], \Gamma \Rightarrow B}\ (\exists 左)^{(\dagger)} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[t/a]}{\Gamma \Rightarrow \exists x A[x/a]}\ (\exists 右)$$

(†)（**$\forall$ 右,$\exists$ 左規則の変数条件**）b は下式に出現しない自由変数である．

シークエント計算 $\mathbf{LJQ'}$ は $\mathbf{LJ'}$ に次の規則を加えて得られる．

$$\frac{A[t/a], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A[x/a], \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\forall\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[b/a]}{\Gamma \Rightarrow \forall x A[x/a]}\ (\forall\text{右})^{(\dagger)}$$

$$\frac{A[b/a], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A[x/a], \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\exists\text{左})^{(\dagger)} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[t/a]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A[x/a]}\ (\exists\text{右})$$

(†)（∀ **右**,∃ **左規則の変数条件**）b は下式に出現しない自由変数である．

注意：$\mathbf{LJQ'}$ では → 右と ∀ 右規則が，$\mathbf{LJQ}$ と同じ「シークエントの右辺が単元集合」の形になっている．

1.2 節，1.3 節の結果は $\mathbf{LJQ}$，$\mathbf{LJQ'}$ についても同様のやり方で示される．以下では対応する定理の文面だけ挙げておく．

定理 17（定理 1 に対応）

(1) $\mathbf{LJQ} \vdash \Psi \Rightarrow F$ ならば $\mathbf{LJQ'} \vdash \Psi \Rightarrow F$.

(2) $\mathbf{LJQ'} \vdash \Psi \Rightarrow \Phi$ ならば $\mathbf{LJQ} \vdash \Psi \Rightarrow \bigvee \Phi$.

定理 18（定理 3 に対応）

$\mathbf{LJQ} \vdash \Psi \Rightarrow F$ ならば cut-free $\mathbf{LJQ} \vdash \Psi \Rightarrow F$.

定理 19（定理 4 に対応）

$\mathbf{LJQ} \vdash\Rightarrow A \vee B$ ならば，$\mathbf{LJQ} \vdash\Rightarrow A$ または $\mathbf{LJQ} \vdash\Rightarrow B$ が成り立つ．

さらに定理 19 と同様に次も示される．

定理 20（直観主義一階述語論理の existence property）

$\mathbf{LJQ} \vdash\Rightarrow \exists x A[x/a]$ ならば，ある項 t が存在して $\mathbf{LJQ} \vdash\Rightarrow A[t/a]$ が成り立つ．

定理 21（定理 5 に対応）

$\mathbf{LJQ} \vdash\Rightarrow A \to B$ ならば，次を満たす論理式 I が存在する

- $\mathbf{LJQ} \vdash\Rightarrow A \to I$.
- $\mathbf{LJQ} \vdash\Rightarrow I \to B$.
- $\mathrm{Symbol}(I) \subseteq \mathrm{Symbol}(A) \cap \mathrm{Symbol}(B)$.

ただし $\mathrm{Symbol}(X)$ は X 中に現れる述語と定数と自由変数の集合である．

2.3 クリプキモデル

直観主義一階述語論理のクリプキモデルは以下の条件を満たす組 $\langle W, \rightsquigarrow, D, \mathcal{I}\rangle$ である．

- $\langle W, \rightsquigarrow\ \rangle$ はクリプキフレーム．
- D は各可能世界に適当な非空集合を割り当てる関数．可能世界 x に割り当てられる集合を $D(x)$ と書き x における対象領域 と呼ぶ．D は次の条件を満たすものとする．

  $x \rightsquigarrow y$ ならば $D(x) \subseteq D(y)$.

  （つまり，世界が進んでいくと対象領域は一般に増えていく.）
- $\mathcal{I}$ は解釈で，次の要素から成る．
  - 各定数を対象領域のどの要素に解釈するか．定数 $\mathbf{c}$ の $\mathcal{I}$ による解釈を $\mathbf{c}^{\mathcal{I}}$ と書く．ただし，$\mathbf{c}^{\mathcal{I}}$ はすべての可能世界の対象領域に入っていることを要請する．すなわち，

    $\mathbf{c}^{\mathcal{I}} \in \bigcap_{w\in W} D(w)$

    とする.（注意：この要請をしなくても議論はできる.）
  - 各 n 引数述語を各可能世界の対象領域上のどんな n 引数述語に解釈するか．可能世界 w における n 引数述語記号 $\mathbf{p}$ の $\mathcal{I}$ による解釈（$D(w)^n$ から $\{\mathsf{True}, \mathsf{False}\}$ への関数）を $\mathbf{p}^{\mathcal{I}}_w$ と書く．ただし $\mathcal{I}$ は次の遺伝性を満たすものとする．

    $w \rightsquigarrow y$ かつ $\mathbf{p}^{\mathcal{I}}_w(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \mathsf{True}$ ならば，$\mathbf{p}^{\mathcal{I}}_y(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \mathsf{True}$

クリプキモデル $\mathcal{M} = \langle W, \rightsquigarrow, D, \mathcal{I}\rangle$ の対象領域 $\bigcup_{w\in W} D(w)$ の各要素の「名前」を定数記号として加えた言語を D による名前拡張言語 と呼ぶ．対象領域の要素 δ の名前が $\mathbf{d}$ であるとき，当然 $\mathbf{d}^{\mathcal{I}} = \delta$ とする．X が D による名前拡張言語の閉論理式で，w が可能世界で，X 中に現われるどんな名前定数も $D(w)$ の要素の名前のとき，X は w で解釈可能である と言う．

F は D による名前拡張言語の閉論理式で，可能世界 w で解釈可能であるとする．そのような F と w に対して，

$w \models F$ （「w で F が成り立つ」）

ということを次のように再帰的に定義する．

$w \models \mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n) \iff \mathbf{p}^{\mathcal{I}}_w(t^{\mathcal{I}}_1, \ldots, t^{\mathcal{I}}_n) = \mathsf{True}$

$w \not\models \bot$.

$w \models A{\to}B \iff \forall y \in W\Big((w \rightsquigarrow y$ かつ $y \models A)$ ならば $y \models B\Big)$

$w \models A{\wedge}B \iff w \models A$ かつ $w \models B$.

$w \models A{\vee}B \iff w \models A$ または $w \models B$.

$w \models \forall x A[x/a] \iff \forall y \in W\Big(w \rightsquigarrow y$ ならば
$D(y)$ の任意の要素の名前 $\mathbf{d}$ に対して $y \models A[\mathbf{d}/a]\Big)$.

$w \models \exists x A[x/a] \iff D(w)$ のある要素の名前 $\mathbf{d}$ に対して $w \models A[\mathbf{d}/a]$

定理 7 と同様に次が成り立つ．

定理 22（遺伝性）

任意のクリプキモデル $\langle W, \rightsquigarrow, D, \mathcal{I}\rangle$ と任意の閉論理式 A に対して，次が成り立つ．

$(A$ が x で解釈可能で $x \models A$ かつ $x \rightsquigarrow y)$ ならば $y \models A$.

IntQ を直観主義一階述語論理の適当な証明体系とする．定理 8 と同様に次が成り立つ．

定理 23（IntQ の健全性）

A は名前定数を含まない任意の論理式とする．$\mathbf{IntQ} \vdash A$ ならば，任意のクリプキモデルの任意の可能世界で閉論理式

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n A[x_1/a_1] \cdots [x_n/a_n]$$

が成り立つ．ただし，$\mathrm{FV}(A) = \{a_1, \ldots, a_n\}$（$a_1, \ldots, a_n$ はすべて異なる）で，$x_1, \ldots, x_n$ は他に現れない束縛変数である．

完全性は次節でツリーシークエントの方法で示される．

2.4 ツリーシークエント計算

直観主義一階述語論理のツリーシークエント計算を導入する．

ツリーシークエントの中の論理式中には名前定数は出現しない．

ツリーシークエントの各ノードには「新規許容変数集合」と呼ばれる自由変数の有限集合が付随して，次の条件を満たしている．

異なるノードの新規許容変数集合は交わりを持たない．

さらに，各ノード n に対して「n の許容項」とは以下のどれかに当てはまる項と定義する．

- すべての定数（名前定数ではなく言語に初めからある定数）．
- 根から n に至るパス上のどこかのノードの新規許容変数集合の要素になっているもの．

そして，ツリーシークエントには次の条件を要請する．

各ノードに出現する論理式中の項は，そのノードの許容項でなければならない．

なお，どのノードの許容項も空にならないように，もしも言語に定数が無い場合は根の新規許容変数を必ず非空集合にする．

ツリーシークエント計算の体系 **TLJQ** は，**TLJ** に次の推論規則を加えたものである．

$$\frac{\mathsf{n} : A[t/a],\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathsf{n} : \forall x A[x/a],\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\forall 左) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \mathsf{m} : A[b/a]}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \mathsf{n} : \forall x A[x/a]}\ (\forall 右)^{(*)}$$

(*) ただし m は n の子で，m は子を持たず，m の中身は右辺の $A[b/a]$ だけ．下式ではノード m は存在しない．上式における m の新規許容変数集合は $\{b\}$ であり，したがって下式に自由変数 b は現れない．

$$\frac{\mathsf{n} : A[b/a],\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathsf{n} : \exists x A[x/a],\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\exists左)^{(**)} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \mathsf{n} : A[t/a]}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \mathsf{n} : \exists x A[x/a]}\ (\exists右)$$

(**) ただし上式における n の新規許容変数集合が α のとき，$b \in \alpha$ であり，下式の新規許容変数集合は $\alpha - \{b\}$ であり，したがって下式に自由変数 b は現れない．

ツリーシークエントの論理式への翻訳は次のようになる．

$$[\![\Gamma \Rightarrow \Delta]\!]_{\mathsf{n}} \quad \equiv \quad \forall x_1 \cdots \forall x_i \Big(\bigwedge (\Gamma_{\mathsf{n}}) \to \bigvee \Big(\Delta_{\mathsf{n}}, [\![\Gamma \Rightarrow \Delta]\!]_{\mathsf{m}_1}, \ldots, [\![\Gamma \Rightarrow \Delta]\!]_{\mathsf{m}_k} \Big) \Big) [x_1/a_1] \cdots [x_i/a_i]$$

ただし，

- $\mathsf{m}_1, \ldots, \mathsf{m}_k$ は n のすべての子．
- $\{a_1, \ldots, a_i\}$（$a_1, \ldots, a_i$ はすべて異なる）は n の新規許容変数集合．
- $x_1, \ldots, x_i$ は他に現れない束縛変数．

定理 24（定理 13 に対応）

$\mathbf{TLJQ} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば，根のラベル a に対して $\mathbf{IntQ} \vdash [\![\Gamma \Rightarrow \Delta]\!]_{\mathsf{a}}$ である．

「無矛盾飽和ツリーシークエント」の定義には次が追加される．

(∀ 左条件)　$(\mathsf{n} : \forall x A[x/a]) \in \Gamma$ ならば，n の任意の許容項 t に対して $(\mathsf{n} : A[t/a]) \in \Gamma$．
(∀ 右条件)　$(\mathsf{n} : \forall x A[x/a]) \in \Delta$ ならば，n のある子 m と m のある許容項 t に対して $(\mathsf{m} : A[t/a]) \in \Delta$．

(∃ 左条件)　$(\mathsf{n} : \exists x A[x/a]) \in \Gamma$ ならば，n のある許容項 t に対して $(\mathsf{n} : A[t/a]) \in \Gamma$．
(∃ 右条件)　$(\mathsf{n} : \exists x A[x/a]) \in \Delta$ ならば，n の任意の許容項 t に対して $(\mathsf{n} : A[t/a]) \in \Delta$．

定理 25（定理 15 に対応）

$\mathbf{TLJQ} \nvdash \Rightarrow \mathsf{r} : A$ ならば，あるクリプキモデル $\langle W, \rightsquigarrow, D, \mathcal{I} \rangle$ とある可能世界 $x \in W$ が存在して $x \not\models A$ である．

(証明)　定理 15 と同様．つまり，$\Rightarrow \mathsf{r} : A$ を拡大した無矛盾飽和ツリーシークエント $\mathcal{T}$ を作り，それから次のように．$\langle W, \rightsquigarrow, D, \mathcal{I} \rangle$ を定義する．

- $\mathcal{T}$ のノード全体の集合を W とする．
- ノード間の親子関係の反射推移閉包を $\rightsquigarrow$ とする．
- ノード a の許容項の集合を $D(\mathsf{a})$ とする．
- $\mathbf{c}^{\mathcal{I}} = \mathbf{c}$.
- $\mathbf{p}^{\mathcal{I}}_{\mathsf{a}}(t_1, \ldots, t_n) = \mathsf{True} \iff \mathbf{p}(t_1, \ldots, t_n)$ はノード a の左辺に含まれる．

(証明終)

定理 26（系 16 に対応）

A は名前定数を含まない任意の閉論理式とする．任意のクリプキモデルの任意の可能世界で A が成り立つのであれば，$\mathbf{IntQ} \vdash A$ である．

定理 10 と定理 15（系 16）の２通りの完全性証明には，本質的な違いはあまりない．なぜなら，補題 9 の証明におけるシークエントの拡大作業は有限で止まるからである．ところが，補題 9 および定理 10 の方法を直観主義一階述語論理に拡張すると，上記のツリーシークエントの方法とは本質的に異なってくる．定理 26 の証明ではツリーシークエントを無限へ拡大する作業は１回だけで済むのに対して，定理 10 の方法では補題 9 を何回も呼び出す必要があり，そのたびに無限の作業を行う必要があるのである（$\forall, \exists$ に関する飽和条件を満たすために新しい項がいくらでも必要になる）．ツリーシークエントの方法は,「必要なノードだけを並行して同時に作っていき，作成途中ではシークエントは有限で，無限的な操作は全体として１回しかしない」という利点によって，いくつかの中間述語論理の完全性証明に威力を発揮する（[4] 参照）.

参考文献

本稿の内容のほとんどは，たとえば [1]，[2]，[3] などの多くの教科書に載っている．ツリーシークエントの方法は，本稿で与えた形での説明を教科書で見たことはないが，[5] にやや丁寧な説明がある．

[1] 小野寛晰『情報科学における論理』

[2] Takeuti『Proof Theory』

[3] Van Dalen『Intuitionistic Logic』（in Handbook of Philosophical Logic）

[4] 鹿島『非古典論理のシークエント計算』（1999 年度数学会年会特別講演）
`http://www.is.titech.ac.jp/~kashima/pub/Mar99.pdf`

[5] 鹿島『論理体系の完全性証明』
`http://www.is.titech.ac.jp/~kashima/manuscript/04Jul.pdf`

[6] 鹿島『直観主義二階命題論理について』
`http://www.is.titech.ac.jp/~kashima/manuscript/05Nov.pdf`

（2007 年 6 月訂正）