

到達可能関係の推移閉包を扱う様相論理のカノニカルモデル

2011 年 7 月 8 日 鹿島 亮

文献 [1],[2] を参考にして、到達可能関係の推移閉包を扱う様相論理のカノニカルモデルについて、その定義、主定理、応用例を紹介する。

1 カノニカルモデル

命題様相論理 $\mathcal{L}$ は通常の様相記号 $\Box$ の他に $\Box^+$ と $\Box^*$ の片方または両方を持つとする。 $\Diamond, \Diamond^+, \Diamond^*$ は $\neg\Box\neg, \neg\Box^+\neg, \neg\Box^*\neg$ の略記とする。論理式を $\varphi, \psi, \dots$ 等で表す。

クリプキモデル $M = \langle W, R, V \rangle$ において、 $\Box^+$ は R の推移閉包で、 $\Box^*$ は R の反射推移閉包で、それぞれ解釈する。

$\mathcal{L}$ のヒルベルト流証明体系は次の通り：

公理

古典論理のトートロジーの形をした論理式。

$\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$. $\Box^+(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box^+\varphi \rightarrow \Box^+\psi)$. $\Box^*(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box^*\varphi \rightarrow \Box^*\psi)$.

$\Box^+\varphi \rightarrow \Box\varphi \wedge \Box\Box^+\varphi$. $\Box^*\varphi \rightarrow \varphi \wedge \Box\Box^*\varphi$.

$\Box\varphi \wedge \Box^+(\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \Box^+\varphi$. $\varphi \wedge \Box^*(\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \Box^*\varphi$.

他に $\mathcal{L}$ 固有の公理。

推論規則

modus ponens.

$\Box, \Box^+, \Box^*$ それぞれについての necessitation.

Γ と Δ が論理式の有限集合のとき、 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ という表現を**シークエント**と呼ぶ。論理式 $\bigwedge(\Gamma) \rightarrow \bigvee(\Delta)$ が証明できるとき「シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明できる」と言う。 Γ と Δ に共通要素が無く $\Gamma \cup \Delta = \Omega$ のときにはシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ のことを「 Ω の**分割**」と呼ぶ（集合 Ω を左辺 Γ と右辺 Δ に分割した、という気持ち）。

$\mathcal{S}$ は次を満たす論理式集合とする。

- 有限集合。
- 部分式に関して閉じている。ただし「 $\Box^+\varphi$ の部分式」に $\Box\Box^+\varphi$ と $\Box\varphi$ とを含める。「 $\Box^*\varphi$ の部分式」に $\Box\Box^*\varphi$ を含める。

このとき次のクリプキモデル $M = \langle W, R, V \rangle$ のことを「**論理 $\mathcal{L}$ と集合 $\mathcal{S}$ から決まるカノニカルモデル**」と呼ぶ。

- $W = \{(\Gamma \Rightarrow \Delta) \mid (\Gamma \Rightarrow \Delta) \text{ は } \mathcal{S} \text{ の分割で, } \mathcal{L} \vdash (\Gamma \Rightarrow \Delta)\}$ （したがって W は有限集合である）。
- $(\Gamma \Rightarrow \Delta) R (\Pi \Rightarrow \Sigma) \iff \forall \varphi \left[(\Box\varphi \in \Gamma) \implies (\varphi \in \Pi) \right]$.

- $V((\Gamma \Rightarrow \Delta), p) = \text{true} \iff p \in \Gamma.$

定理 1.1 (カノニカルモデルの主定理) 上記のカノニカルモデルにおいて、 $\mathcal{S}$ に含まれるすべての論理式 φ と W のすべての要素 $(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ が次を満たす.

$$\begin{aligned} (\varphi \in \Gamma) &\implies (M, (\Gamma \Rightarrow \Delta) \models \varphi). \\ (\varphi \in \Delta) &\implies (M, (\Gamma \Rightarrow \Delta) \not\models \varphi). \end{aligned}$$

この証明は φ に関する帰納法による.

【 $\varphi = (\Box^+ \alpha) \in \Gamma$, または $\varphi = (\Box^* \beta) \in \Gamma$ のとき】 W の任意の要素 $(\Pi \Rightarrow \Sigma), (\Pi' \Rightarrow \Sigma')$ について次が成り立つ.

$$\begin{aligned} ((\Box^+ \alpha) \in \Pi) \ \&\ (\Pi \Rightarrow \Sigma) R (\Pi' \Rightarrow \Sigma') \implies \{(\Box^+ \alpha), \alpha\} \subseteq \Pi'. \\ ((\Box^* \beta) \in \Pi) \ \&\ (\Pi \Rightarrow \Sigma) R (\Pi' \Rightarrow \Sigma') \implies \{(\Box^* \beta), \beta\} \subseteq \Pi'. \end{aligned}$$

これらは $\mathcal{S}$ が「部分式」について閉じていることと公理

$$\Box^+ \alpha \rightarrow \Box \alpha \wedge \Box \Box^+ \alpha. \quad \Box^* \beta \rightarrow \beta \wedge \Box \Box^* \beta.$$

などから言える. また $(\Box^* \beta) \in \Pi$ ならば $\beta \in \Pi$ でもある. これらから, 任意の $n \geq 1$ に対して

$$(\Gamma \Rightarrow \Delta) R^n (\Pi' \Rightarrow \Sigma') \implies \alpha \in \Pi'$$

また任意の $n \geq 0$ に対して

$$(\Gamma \Rightarrow \Delta) R^n (\Pi' \Rightarrow \Sigma') \implies \beta \in \Pi'$$

が言えるので, 帰納法の仮定と合わせて題意が示される.

【 $\varphi = (\Box^+ \alpha) \in \Delta$, または $\varphi = (\Box^* \beta) \in \Delta$ のとき】 カノニカルモデルにおいて論理式 $\Box^+ \alpha$, $\neg \Box^+ \alpha$, $\Box^* \alpha$, $\neg \Box^* \alpha$ が成り立つ世界全体の集合をそれぞれ $W_{\Box^+ \alpha}$, $W_{\neg \Box^+ \alpha}$, $W_{\Box^* \beta}$, $W_{\neg \Box^* \beta}$ と表記する. すなわち

$$\begin{aligned} W_{\Box^+ \alpha} &= \{(\Pi \Rightarrow \Sigma) \mid (M, (\Pi \Rightarrow \Sigma) \models \Box^+ \alpha)\}. & W_{\neg \Box^+ \alpha} &= W - W_{\Box^+ \alpha}. \\ W_{\Box^* \alpha} &= \{(\Pi \Rightarrow \Sigma) \mid (M, (\Pi \Rightarrow \Sigma) \models \Box^* \alpha)\}. & W_{\neg \Box^* \alpha} &= W - W_{\Box^* \alpha}. \end{aligned}$$

次が示されれば題意の対偶が言えたことになる.

$$(\Gamma \Rightarrow \Delta) \in W_{\Box^+ \alpha} \implies (\Box^+ \alpha) \notin \Delta. \tag{1}$$

$$(\Gamma \Rightarrow \Delta) \in W_{\Box^* \beta} \implies (\Box^* \beta) \notin \Delta. \tag{2}$$

以下では (2) を証明する ((1) は練習問題) .

まず $\Box^*$ の真理値の定義から次が言えることを注意しておく.

$$(\Pi \Rightarrow \Sigma) \in W_{\Box^*\beta} \text{ ならば } M, (\Pi \Rightarrow \Sigma) \models \beta. \quad (3)$$

$$(\Pi_1 \Rightarrow \Sigma_1) \in W_{\Box^*\beta} \text{ かつ } (\Pi_2 \Rightarrow \Sigma_2) \in W_{\neg\Box^*\beta} \text{ ならば } (\Pi_1 \Rightarrow \Sigma_1) \mathcal{R} (\Pi_2 \Rightarrow \Sigma_2). \quad (4)$$

一般にシークエント $\Pi \Rightarrow \Sigma$ に対して論理式 $\mathbb{L}(\Pi \Rightarrow \Sigma)$ と $\mathbb{R}(\Pi \Rightarrow \Sigma)$ を次で定義する.

$$\mathbb{L}(\Pi \Rightarrow \Sigma) = \bigwedge (\Pi, \neg\Sigma).$$

$$\mathbb{R}(\Pi \Rightarrow \Sigma) = \bigvee (\neg\Pi, \Sigma).$$

これらはそれぞれ中身のシークエントを左辺／右辺に寄せたときの左辺／右辺を表す論理式だと思えばよい. なお $\mathbb{L}(\dots)$ と $\mathbb{R}(\dots)$ は互いに否定の関係にある.

今, 任意の世界 $(\Pi_1 \Rightarrow \Sigma_1), (\Pi_2 \Rightarrow \Sigma_2)$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & (\Pi_1 \Rightarrow \Sigma_1) \in W_{\Box^*\beta} \text{ かつ } (\Pi_2 \Rightarrow \Sigma_2) \in W_{\neg\Box^*\beta} \text{ ならば} \\ & \mathcal{L} \vdash \mathbb{L}(\Pi_1 \Rightarrow \Sigma_1) \rightarrow \Box \mathbb{R}(\Pi_2 \Rightarrow \Sigma_2). \end{aligned} \quad (5)$$

なぜなら, (5) の前提と (4) とカノニカルモデルの定義から

$$\Box\psi \in \Pi_1, \quad \psi \in \Sigma_2,$$

を満たす論理式 ψ が存在するからである.

論理式 ω と $\bar{\omega}$ を

$$\begin{aligned} \omega &= \bigvee \{ \mathbb{L}(\Pi_1 \Rightarrow \Sigma_1) \mid (\Pi_1 \Rightarrow \Sigma_1) \in W_{\Box^*\beta} \} \\ \bar{\omega} &= \bigwedge \{ \mathbb{R}(\Pi_2 \Rightarrow \Sigma_2) \mid (\Pi_2 \Rightarrow \Sigma_2) \in W_{\neg\Box^*\beta} \} \end{aligned}$$

とすると次が成り立つ.

$$\mathcal{L} \vdash \Box(\omega \vee \neg\bar{\omega}). \quad (6)$$

これは, $\mathcal{S}$ の分割すべてを $(\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1), (\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2), \dots, (\Gamma_m \Rightarrow \Delta_m)$ としたとき, 論理式 $\mathbb{L}(\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1) \vee \dots \vee \mathbb{L}(\Gamma_m \Rightarrow \Delta_m)$ がトートロジーであることと, 分割のうち $\omega, \bar{\omega}$ の構成に登場しない $(\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i)$ については $\mathcal{L} \vdash \mathbb{R}(\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i)$ であることなどから言える.

今 (5) から $\mathcal{L} \vdash \omega \rightarrow \Box\bar{\omega}$ が得られるので, これと (6) などから次が得られる.

$$\mathcal{L} \vdash \omega \rightarrow \Box\omega.$$

そしてこれから $\Box^*$ についての necessitation と公理 $\omega \wedge \Box^*(\omega \rightarrow \Box\omega) \rightarrow \Box^*\omega$ などから次を得る.

$$\mathcal{L} \vdash \omega \rightarrow \Box^*\omega. \quad (7)$$

ところで ω については次も成り立つ.

$$\mathcal{L} \vdash \omega \rightarrow \beta. \quad (\because (3) \text{ と帰納法の仮定から } W_{\Box^*\beta} \text{ の各要素は左辺に } \beta \text{ を含む}) \quad (8)$$

これらから目標の (2) を証明する. $(\Gamma \Rightarrow \Delta) \in W_{\Box^*\beta}$ ならば ω の定義から

$$\mathcal{L} \vdash \mathbb{L}(\Gamma \Rightarrow \Delta) \rightarrow \omega$$

であり, (7),(8) などと合わせて

$$\mathcal{L} \vdash \mathbb{L}(\Gamma \Rightarrow \Delta) \rightarrow \Box^*\beta$$

を得る. すると, もしも $(\Box^*\beta) \in \Delta$ だとすると, $\mathbb{L}(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ の定義から $\mathcal{L} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ になってしまいカノニカルモデルの定義に反する.

2 使用例— LTL

$\mathcal{L}$ の様相記号は $\Box$ と $\Box^*$ ($\Box^+$ は使わない), $\mathcal{L}$ の証明体系は, 公理として次の形の式を前節の体系に追加する.

$$(\Box\neg\varphi) \leftrightarrow (\neg\Box\varphi).$$

この $\mathcal{L}$ は線形時相論理 LTL の Until 無し部分に等しい. 到達可能関係 R が次の条件

各 x について, xRy なる y がちょうどひとつ存在する (R が**関数的**) という)

を満たす有限モデルに対して, $\mathcal{L}$ が完全であることを証明する (健全性は明らか). $\mathcal{L}$ で証明できる論理式をいくつか挙げておく.

$$\Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi. \quad \Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi). \quad \Box(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \vee \Box\psi). \quad (9)$$

$$\Diamond^*\varphi \wedge \Diamond^*\psi \rightarrow \Diamond^*(\varphi \wedge \Diamond^*\psi) \vee \Diamond^*(\psi \wedge \Diamond^*\varphi). \quad (10)$$

(9) は公理 $(\Box\neg\varphi) \leftrightarrow (\neg\Box\varphi)$ などから簡単に得られるが (10) は難しい. 文献 [2] の 88-89 頁に $\Box^*(\Box^*A \rightarrow B) \vee \Box^*(\Box^*B \rightarrow A)$ の証明が載っているので, $A = \neg\varphi$, $B = \neg\psi$ とすればこれから (10) は導かれる.

目標の完全性は次のものである.

定理 2.1 $\mathcal{L} \nVdash \varphi_0$ ならば, 到達可能関係が関数的なある有限モデルのある世界で φ_0 は偽.

一般に論理式 φ に対して論理式 $\varphi \wedge \Box\Box^*\neg\varphi$ のことを $\text{last}(\varphi)$ と呼び, $\Box^*\Diamond^*\varphi$ のことを $\text{infinite}(\varphi)$ と呼ぶ.

φ_0 の部分論理式 (前節の意味で) 全体と $\{\Box^*\neg\top\}$ の和集合を $\mathcal{S}_0$ とする. $\mathcal{S}_0$ 中の $\Box$ 論理式すべてと $\Box^*$ 論理式すべてを

$$\Box\alpha_1, \Box\alpha_2, \dots, \Box\alpha_a, \Box^*\neg\beta_1, \Box^*\neg\beta_2, \dots, \Box^*\neg\beta_b$$

とする. ただしここでは, すべての $\Box^*$ 論理式は $\Box^*\neg\dots$ という形であることを仮定している. この仮定の正当性は「論理式中の $\Box^*\varphi$ を $\Box^*\neg\neg\varphi$ に置き換えても, $\mathcal{L}$ での証明可能性

もモデルでの真理値も変わらない」という性質による． $\langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \rangle$ が $\langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_b \rangle$ から任意個を重複無く選んだものであるとき，論理式

$$\Diamond^+ \left(\text{last}(\gamma_1) \wedge \Diamond^+ \left(\text{last}(\gamma_2) \wedge \Diamond^+ \left(\dots \wedge \Diamond^+ \left(\text{last}(\gamma_{n-1}) \wedge \Diamond^+ \text{last}(\gamma_n) \right) \dots \right) \right) \right)$$

のことを「種（たね）式」と呼ぶ．次の論理式とその部分論理式（前節の意味で）全体の集合を $\mathcal{S}$ とする．

$$\mathcal{S}_0. \quad \Box \neg \alpha_1, \Box \neg \alpha_2, \dots, \Box \neg \alpha_a.$$

$$\text{last}(\beta_1), \text{last}(\beta_2), \dots, \text{last}(\beta_b). \text{infinite}(\beta_1), \text{infinite}(\beta_2), \dots, \text{infinite}(\beta_b).$$

すべての種式．

これは有限集合である．この $\mathcal{S}$ で前節のようにカノニカルモデル M_0 を作ると，ある世界 $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ があって φ_0 が偽になる．しかし M_0 の到達可能関係は関数的でないかもしれない．そこで，後は M_0 を元にして， φ_0 の部分式に関しては真偽を変えないように注意しながら関数的なモデルを作る．

まず，上記の世界 $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ と φ_0 の $\Box^* \neg$ 部分のボディである $\beta_1, \dots, \beta_b$ に着目して，集合 $\{\beta_1, \dots, \beta_b\}$ を次の3つに分割する．

$$\mathbf{Zero} = \{\beta_i \mid \Box^+ \neg \beta_i \in \Gamma_0\}.$$

$$\mathbf{Finite} = \{\beta_i \mid \Box^+ \neg \beta_i \in \Delta_0 \text{ かつ } \text{infinite}(\beta_i) \in \Delta_0\}.$$

$$\mathbf{Infinite} = \{\beta_i \mid \Box^+ \neg \beta_i \in \Delta_0 \text{ かつ } \text{infinite}(\beta_i) \in \Gamma_0\}.$$

Γ_0 の要素は真， Δ_0 の要素は偽である，と考えると，**Zero**, **Finite**, **Infinite** の要素はそれぞれ「すべての時点で偽であるもの」「真になる回数が1回以上有限回であるもの」「真になる回数が無限回であるもの」と解釈できる．

【モデル前半部の作成】ここでは **Finite** は非空集合とする（もし空集合であるならばこの手順は不要）．

補題 2.2 **Finite** が非空であるならば，その要素を $\mathbf{Finite} = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ と適切に並べて，種式 $\Diamond^+ (\text{last}(\gamma_1) \wedge \Diamond^+ (\text{last}(\gamma_2) \wedge \Diamond^+ (\dots \wedge \Diamond^+ \text{last}(\gamma_k) \dots)))$ が Γ_0 の要素になるようにできる．

（この補題の証明は後回し）

これにより，カノニカルモデルのある世界 $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ において上記の種式が真になるので，次のような世界の列 $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ が存在する．

- $\mathbf{a}_0 = (\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0)$.
- $\mathbf{a}_0 R \mathbf{a}_1 R \dots R \mathbf{a}_p$.
- 適当な $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k = p$ について $M, \mathbf{a}_{n_i} \models \text{last}(\gamma_i)$ (ただし $i = 1, 2, \dots, k$)

この列 $\mathbf{a}_0 R \mathbf{a}_1 R \cdots R \mathbf{a}_p$ をモデルの前半部分とする.

【モデルの後半部の作成】 **Infinite** は非空集合であり ($\cdot: \top \in \mathbf{Infinite}$), その要素を任意に並べて, $\mathbf{Infinite} = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell\}$ とする. カノニカルモデルの各世界では, その左辺に $\text{infinite}(\delta_i)$ が含まれる δ_i は「そこからどのように進んでも, 進んだ先からさらにうまく進めば δ_i を真にする世界が必ず存在する」という性質が成り立つ. したがって, 上記の前半部分最後の世界 $\mathbf{a}_p$ からさらに次のような無限の遷移が可能であることが言える: 世界 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots$ が存在して次が成り立つ:

- $\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_p$.
- $\mathbf{b}_0 R \mathbf{b}_1 R \cdots$.
- 適当な $m_1^1 \leq m_2^1 \leq \cdots \leq m_\ell^1 \leq m_1^2 \leq m_2^2 \leq \cdots \leq m_\ell^2 \leq \cdots \leq m_1^j \leq m_2^j \leq \cdots \leq m_\ell^j \leq m_1^{j+1} \leq \cdots$ が存在して, 任意の j について $M, \mathbf{b}_{m_i^j} \models \delta_i$ (ただし $i = 1, 2, \dots, \ell$).

元の世界は有限個なので, この列 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots$ の中に必ず「同じ世界への無限回の訪問」がある. したがって $\mathbf{b}_q = \mathbf{b}_r$ となる q, r で, ある j について $q \leq m_1^j \leq m_1^{j+1} \leq r$ なるものが存在する (この条件は, $\mathbf{b}_q$ と $\mathbf{b}_r$ の間で必ず $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell$ が一回以上真になっていることを表す).

以上の前半部と後半部で存在が明らかにされた世界

$$\mathbf{a}_0 (= \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0), \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p (= \mathbf{b}_0), \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q+1}, \dots, \mathbf{b}_r$$

をまとめて可能世界として目的のモデルを作る. もしもこの中に重複があっても (つまり, たとえば $i \neq j$ なる $\mathbf{a}_i$ と $\mathbf{a}_j$ が元のカノニカルモデルの同じ世界である, 等), このモデルでは「異なる世界」とする. そして, 到達可能関係は $\mathbf{a}_0$ から始まる上記の順番に付けて, 最後の $\mathbf{b}_r$ からは $\mathbf{b}_{q+1}$ に戻ってループするようにする. 命題変数の真偽は元のカノニカルモデル M_0 と同じにする. すると命題変数以外についても, φ_0 の部分式に関しては各世界での真偽が M_0 から変わらないことが, 論理式に関する帰納法で言える.

重要な点は, 元のカノニカルモデルから到達可能先を減らしているのので, 偽であった $\Box\alpha$ や偽であった $\Box^+\beta$ が真になってしまう可能性があるが, それが起こらないように作っている, ということである.

参考文献

- [1] R.Fagin, J.Y.Halpern, Y.Moses, and M.Y.Vardi, Reasoning About Knowledge, (MIT Press, 1995).
- [2] R.Goldblatt, Logics of Time and Computation, second edition (CSLI Lecture Note, 1992).