XCO.B103 情報理工学基礎 3 [全 7 回]

—第 2 回: 離散確率 (1)—

三好 直人@情報理工学院 数理・計算科学系

2024 年度 第 4Q

確率とは?

不確かな現象を数学として扱うための概念

豊富な応用: 物理現象 (量子の運動) や社会現象 (株価の変動) など

求められること:

- 数学として論理的であること
- 実際の現象を (直感的に) 説明できること

確率の起源: パスカルとフェルマの往復書簡 (17 世紀)

現代確率論: コルモゴロフ『確率論の基礎概念』(1933) から
測度論・ルベーグ積分論の援用
(数理・計算科学系では 2 年生以降で学修する)

標本と標本空間

確率の基礎概念

標本 (根元事象): 確率的現象の起こり得る個々の結果
(例: コインの表裏，サイコロの目)

標本空間: 標本の集合 $\cdots\cdots$ 主に Ω と表す

例:

- コインを 1 回投げるとき $\Omega = \{$ 表, 裏 $\}$
  コインを 2 回投げるとき $\Omega = \{$ 表表, 表裏, 裏表, 裏裏 $\}$
  コインを 3 回...

- サイコロを 1 回振るとき $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  サイコロを 2 回振るとき $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  ...
  サイコロを n 回振るとき
  $\Omega = \{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \mid i_k = 1, 2, \ldots, 6,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$

組合せ確率
(高校数学 A で習う確率)

定義 1 (組合せ確率)

- 標本空間 Ω は有限集合
- どの標本も同程度に起こり易い (同様に確からしい) と仮定

事象: Ω の部分集合

事象 A $(\subseteq \Omega)$ の確率:

$$\mathrm{P}(A) := \frac{A\text{ が持つ標本の数}}{\Omega\text{ が持つ標本の数}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

事象 A が起こる (生起する) $\leftrightarrow$ 結果として現れる標本が A の要素

例: サイコロを 2 回振ったとき，目の和が 4 以下になる
(目の和が 4 以下という事象が生起する) 確率は?

組合せ確率の限界

「標本空間が有限で，どの標本も同程度に生起しやすい」
という仮定には限界がある!

例:

1. コインを表が出るまで投げ続ける
   標本空間 $\Omega = \{\omega_\infty, \omega_1, \omega_2, \ldots\}$
   ω_i ($i = 1, 2, \ldots$): i 回目に初めて表が出たことを表す標本
   ω_∞: 永久に表が出ないことを表す標本
   ➜ Ω は可算無限集合
2. 長さ 1 の区間 $[0, 1]$ からランダムに 1 点を選ぶ
   標本空間 $\Omega = [0, 1]$ ➜ Ω は非可算集合 (連続体)
3. コインを無限回 (永久に) 投げ続ける
   標本空間 $\Omega = \{\epsilon_1\epsilon_2 \cdots \mid \epsilon_i \in \{0, 1\},\ i = 1, 2, \ldots\}$ (0, 1 の無限列)
   $\epsilon_i = 1$: i 回目が表， $\epsilon_i = 0$: i 回目が裏
   ➜ Ω は連続体 ($0.\epsilon_1\epsilon_2\cdots$ は $[0, 1]$ の実数の 2 進数表現)

2, 3 は 2 年生以降で学修する

離散確率

定義 2 (離散確率)

標本空間 Ω: 高々可算 (有限または可算) 集合　$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

以下を満たす関数 (確率質量関数) $p \colon \Omega \to [0, 1]$ を定める

$$p(\omega) \geq 0 \ \ ({}^\forall\omega \in \Omega) \quad \text{かつ} \quad \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

事象: Ω の部分集合

事象 A $(\subseteq \Omega)$ の確率:　$\mathrm{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$

(Ω, p): 離散確率空間

確率質量関数によって定まる確率 $\leftrightarrow$ 離散確率分布

- 組合せ確率の定義 ($|\Omega| < \infty$ かつ $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ $(\omega \in \Omega)$) を含んでいる
- 標本ごとに起こりやすさが異なる場合を扱える

例題 1

コインを表が出るまで投げ続ける．$\Omega = \{\omega_\infty, \omega_1, \omega_2, \ldots\}$

ω_i ($i = 1, 2, \ldots$): i 回目に初めて表が出たことを表す標本

ω_∞: 永久に表が出ないことを表す標本

$p(\omega_\infty) = 0,\ p(\omega_i) = \dfrac{1}{2^i}$ ($i = 1, 2, \ldots$) と定めると

$$p(\omega_i) \geq 0\ (i = 1, 2, \ldots, \infty) \quad \text{かつ} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$$

1. k (≥ 1) 回目までに表が 1 度も出ない確率は?
2. 初めて表が出るのが偶数回目である確率は?

例題 1 の解答

1. $k\ (\geq 1)$ 回目までに表が 1 度も出ない確率は?
   $A = \{\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \ldots\}$

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=k+1}^{\infty} p(\omega_i) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1/2^{k+1}}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^k}$$

2. 初めて表が出るのが偶数回目である確率は?
   $B = \{\omega_2, \omega_4, \ldots\}$

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_{2i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}$$

➜ 初めて表が出るのが奇数回目である確率は $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

事象の演算

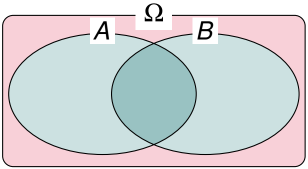
$A, B \subseteq \Omega$ (事象)

和事象: $A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A$ または $\omega \in B\}$

積事象: $A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A$ かつ $\omega \in B\}$

余事象: $A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$

差事象: $A \setminus B = A - B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A$ かつ $\omega \notin B\} = A \cap B^c$



注: $A \subseteq \Omega$ に対して

$$A^c = \Omega \setminus A,\ A \cup A^c = \Omega,\ A \cap A^c = \emptyset,$$

$$A \cup \Omega = \Omega,\ A \cap \Omega = A,\ A \cup \emptyset = A,\ A \cap \emptyset = \emptyset$$

互いに排反な事象と事象の分割

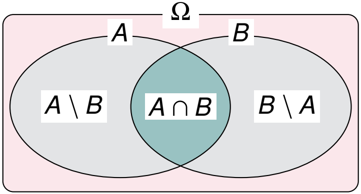
- 事象 $A,\ B \subseteq \Omega$ が互いに排反 $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$
- 事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ が事象 $A \subseteq \Omega$ の分割

  $\Leftrightarrow$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ (互いに排反) かつ $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

  $(n = \infty$ でもよい)

例:

- $A \subseteq \Omega$ に対して A, A^c は Ω の分割
- $A, B \subsetneq \Omega$ $(A \neq B,\ A \neq B^c,\ A, B \neq \emptyset)$ に対して $A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A,\ (A \cup B)^c$ は Ω の分割



集合演算の基本公式

$A, B, C \subseteq \Omega$ (事象)

反射法則: $A \cup A = A \cap A = A$

交換法則: $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$

結合法則:
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

分配法則:
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

ド・モルガンの法則:
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

確率の基本的な性質

(Ω, p): 離散確率空間

$$\mathrm{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega) \quad (A \subseteq \Omega)$$

$A, B \subseteq \Omega$ (事象)

1. $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
2. $A \cap B = \emptyset$ (互いに排反) ➜ $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ (加法性)
3. $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$
4. $A \subseteq B$ ➜ $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$ (単調性)
5. $\mathrm{P}(A \cup B) \leq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ (劣加法性)
6. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$ (加法法則)

例題 2

誕生日のパラドックス

n 人の集団の中で誕生日が同じ人の組が 1 組以上ある確率 P_n は?
ただし，集団の人たちの誕生日はすべて 1 ~ 365 日に同様に分布

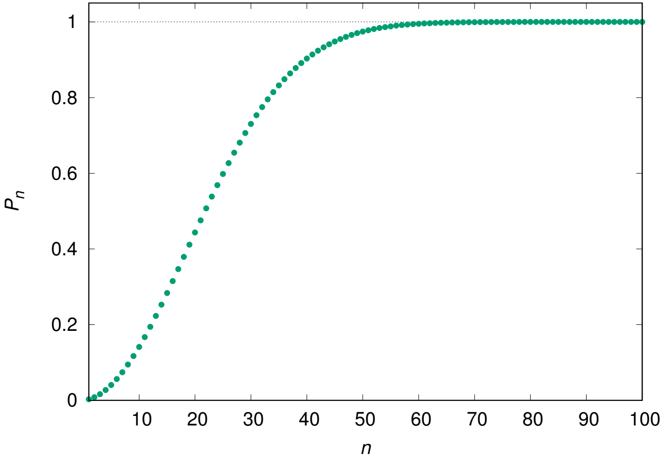
解答: $A = \{n$ 人全員の誕生日が異なる $\}$ とすると
$A^c = \{n$ 人の中で同じ誕生日の人の組が 1 組以上ある $\}$
➜ 求める確率は $P_n = \mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$

$\Omega = \{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \mid i_k = 1, 2, \ldots, 365,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$
➜ $|\Omega| = 365^n$
$A = \{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \Omega \mid i_j \neq i_k\ (j \neq k)\}$
➜ $|A| = 365 \cdot (365 - 1) \cdots (365 - (n - 1))$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{365}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots, 365)$$

➜ $P_n = 1 - \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{365}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots, 365;\ \prod_{i=1}^{0} \cdot = 1)$

例題 2 (誕生日のパラドックス) の数値結果



たとえば $P_{23} \approx 0.507$, $P_{30} \approx 0.706$, $P_{41} \approx 0.903$, $P_{50} \approx 0.970$, $P_{68} \approx 0.999$, $P_{120} \approx 0.9999999998$

劣加法性・加法法則の一般化

補題 1

$A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ (事象)

劣加法性: $\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$

加法法則 (包除原理):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq \mathcal{N} \\ |I| = k}} \mathrm{P}\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right) \qquad (\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\})
\end{aligned}
$$

補題 1 の確認

(厳密には帰納法で証明する)

たとえば $n = 3$ のとき，$A,\ B,\ C \subseteq \Omega$ に対して

結合法則

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}\big(A \cup (B \cup C)\big)$$

加法法則

分配法則

$$= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \cup C) - \mathrm{P}\big(A \cap (B \cup C)\big)$$

加法法則

$$= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}\big((A \cap B) \cup (A \cap C)\big)$$

加法法則

$$= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C)$$

例題 3

n 人がそれぞれ 1 つずつプレゼントを持ち寄り，一旦回収したあとランダムに 1 人 1 つずつプレゼントを配る
自分が持ってきたプレゼントを受け取る人が少なくとも 1 人いる確率 P_n は?

解答: $|\Omega| = n!,\ p(\omega) = \dfrac{1}{n!} \quad (\omega \in \Omega)$

$A_i = \{i$ 番目の人が自分のプレゼントを受け取る $\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$
とすると求める確率は

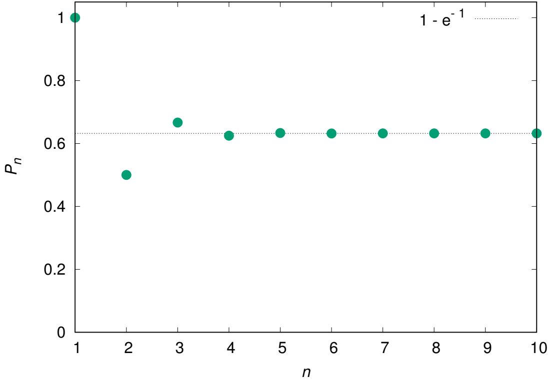
$$P_n = \mathrm{P}\Bigl(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Bigr) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \underbrace{\sum_{\substack{I \subseteq \mathcal{N} \\ |I|=k}}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\mathrm{P}\Bigl(\bigcap_{j \in I} A_j\Bigr)}_{= \frac{(n-k)!}{n!}} \quad (\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

例題 3 (プレゼント交換の問題) の数値結果

$$P_1 = 1,\ P_2 = \frac{1}{2},\ P_3 = \frac{2}{3},\ P_4 = \frac{5}{8},\ P_5 = \frac{19}{30}, \ldots$$

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \to 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632\ldots \quad (n \to \infty)$$



条件付き確率

定義 3 (条件付き確率)

$A, B \subseteq \Omega$ (事象) かつ $\mathrm{P}(A) > 0$
事象 A が与えられたときの B の条件付き確率:

$$\mathrm{P}(B \mid A) := \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

例: サイコロを 2 回投げる．目の和が 6 であることが与えられたとき少なくとも一方の目が 2 である条件付き確率は?

答え: $A = \{\text{目の和が }6\}$, $B = \{\text{一方の目が }2\}$

$$\begin{cases} A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(A) = \dfrac{5}{36} \\ A \cap B = \{(2,4),(4,2)\} \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{2}{36} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; \mathrm{P}(B \mid A) = \frac{2}{5}$$

注: $\mathrm{P}(\cdot \mid A)$ は P の Ω から A への射影 $(\mathrm{P}(A \mid A) = 1)$

$$(\Omega, p) \to (A, p_A), \quad p_A(\omega) := p(\omega)/\mathrm{P}(A), \ \omega \in A$$

乗法法則

補題 2 (乗法法則)

$A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$ (事象) かつ $\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0 \rightarrow$

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathrm{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathrm{P}\left(A_n \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

- $n = 2$ のとき． $A, B \subseteq \Omega$ かつ $\mathrm{P}(A) > 0$

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \iff \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B \mid A)$$

- $n = 3$ のとき． $A, B, C \subseteq \Omega$ かつ $\mathrm{P}(A \cap B) > 0$

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\,\underbrace{\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}}_{=\,\mathrm{P}(B \mid A)}\,\underbrace{\frac{\mathrm{P}(A \cap B \cap C)}{\mathrm{P}(A \cap B)}}_{=\,\mathrm{P}(C \mid A \cap B)}$$

分割公式と全確率の公式

補題 3

$A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$: Ω の分割 $(A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j))$ かつ $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega)$

- $B \subseteq \Omega$ (事象) ➜

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i \cap B) \qquad \text{(分割公式)}$$

- さらに $\mathrm{P}(A_i) > 0 \ (i = 1, 2, \ldots n)$ ➜

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B \mid A_i) \qquad \text{(全確率の公式)}$$

$n = \infty$ でも成立

証明:

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}\Bigg(\bigg(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}_{=\,\Omega}\bigg) \cap B\Bigg) \overset{\text{分配法則}}{=} \mathrm{P}\Bigg(\bigcup_{i=1}^{n} \overbrace{(A_i \cap B)}^{\text{互いに排反}}\Bigg) \overset{\text{加法性}}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathrm{P}(A_i \cap B)}_{=\,\mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B \mid A_i)}$$

例題 4

ポリアのつぼ

a 個の赤玉と b 個の白玉が入ったつぼがある．ランダムに玉を 1 つ取り出して，取り出した玉と同じ色の玉を c 個加えてつぼに戻すこの操作を繰り返すとき

1. 2 回目に赤玉を取り出す確率 P_2 は?
2. n 回目に赤玉を取り出す確率 P_n は?

解答 1: $A_i = \{i$ 回目に赤玉を取り出す $\}$ とおく

$$P_2 = \mathrm{P}(A_2) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2 \mid A_1) + \mathrm{P}({A_1}^c)\,\mathrm{P}(A_2 \mid {A_1}^c) \quad \text{（全確率の公式）}$$

$$= \frac{a}{a+b}\,\frac{a+c}{a+b+c} + \frac{b}{a+b}\,\frac{a}{a+b+c} = \frac{a}{a+b}$$

例題 4 (ポリアのつぼ) ❷ の解答

$A_n[a,b] = \{$ 赤玉 a 個, 白玉 b 個で始めて，n 回目に赤玉を取り出す $\}$ とおく

➜ $\mathrm{P}(A_1[a,b]) = \mathrm{P}(A_2[a,b]) = \dfrac{a}{a+b}$

ある $n \in \{2,3,4,\ldots\}$ について $\mathrm{P}(A_n[a,b]) = \dfrac{a}{a+b} \quad (a,b=1,2,\ldots)$ と仮定 (帰納法)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_{n+1}[a,b]) &= \mathrm{P}(A_1[a,b])\,\underbrace{\mathrm{P}(A_{n+1}[a,b] \mid A_1[a,b])}_{\mathrm{P}(A_n[a+c,b])} \\
&\quad + \mathrm{P}(A_1[a,b]^c)\,\underbrace{\mathrm{P}(A_{n+1}[a,b] \mid A_1[a,b]^c)}_{\mathrm{P}(A_n[a,b+c])} \\
&= \frac{a}{a+b}\,\frac{a+c}{a+c+b} + \frac{b}{a+b}\,\frac{a}{a+b+c} = \frac{a}{a+b}
\end{aligned}$$

全確率の公式

ベイズの公式

補題 4 (ベイズの公式)

$A_1, A_2, \ldots, A_n$: Ω の分割，$\mathrm{P}(A_i) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$
$B \subseteq \Omega$ (事象)，$\mathrm{P}(B) > 0$
➜

$$\mathrm{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B \mid A_i)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(A_j)\,\mathrm{P}(B \mid A_j)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

証明:

$$\mathrm{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_i \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \quad \begin{cases} \mathrm{P}(A_i \cap B) = \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B \mid A_i) & \text{(乗法法則)} \\ \mathrm{P}(B) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(A_j)\,\mathrm{P}(B \mid A_j) & \text{(全確率の公式)} \end{cases}$$

例題 5

次のような感染症の検査を考える

- 感染している人は 98%の確率で陽性と診断され (感度)
  2%の確率で陰性と診断される (偽陰性)
- 感染していない人は 1%の確率で陽性と診断され (偽陽性)
  99%の確率で陰性と診断される (特異度)

1000 人に 1 人が感染しているとすると，陽性と診断された人が実際に感染している確率は?

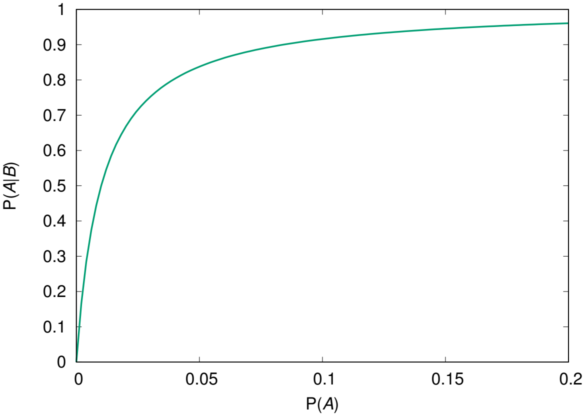
解答: $A = \{\text{感染}\}$, $B = \{\text{陽性}\}$ とおく

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B \mid A) + \mathrm{P}(A^c)\,\mathrm{P}(B \mid A^c)}$$ （ベイズの公式）

$\mathrm{P}(A) = 0.001$，$\mathrm{P}(A^c) = 0.999$，$\mathrm{P}(B \mid A) = 0.98$，$\mathrm{P}(B \mid A^c) = 0.01$

➜ $\mathrm{P}(A \mid B) \approx 0.0893$

例題５の数値例



$\mathrm{P}(A) = 0.01$ ➜ $\mathrm{P}(A \mid B) \approx 0.497$，$\mathrm{P}(A) = 0.1$ ➜ $\mathrm{P}(A \mid B) \approx 0.916$

事象の独立性

コインを初めて表が出るまで投げる問題でも誕生日の問題でも
独立性を仮定していた

定義 4 (2 つの事象の独立性)

事象 $A, B \subseteq \Omega$ が互いに独立 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$

例: 公平なコインを 2 回投げる．$\Omega = \{$ 表表, 表裏, 裏表, 裏裏 $\}$

$A = \{$1 回目が表 $\}$
$B = \{$1 回目と 2 回目の結果が異なる $\}$

$\rightarrow$ $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{2},\ \mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2},\ \mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{4} = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$

$\rightarrow$ 事象 A, B は互いに独立

注: 事象 A, B が互いに独立かつ $\mathrm{P}(A) > 0$ $\rightarrow$ $\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B)$

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)} = \mathrm{P}(B)$$

3つ以上の事象の独立性

定義 5 (3つ以上の事象の独立性)

事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ が**互いに独立** $\Leftrightarrow$
任意の $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ と任意に選んだ $i_1, i_2, \ldots, i_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ($j \neq k$ なら $i_j \neq i_k$) に対して

$$\mathrm{P}\Bigl(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\Bigr) = \prod_{j=1}^{m} \mathrm{P}(A_{i_j})$$

$n = \infty$ のときも「任意の m $(1 \leq m < \infty)$」と置き換えて成立

注:

1. $\mathrm{P}\Bigl(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Bigr) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$ でも $A_1, \ldots, A_n$ が互いに独立とは限らない
2. $\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(A_j)$ $\quad ({}^{\forall} i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j)$ でも $A_1, \ldots, A_n$ が互いに独立とは限らない

事象の独立性についての注意

前ページ注 ❷ の例

公平なコインを 2 回投げる．$\Omega = \{$ 表表, 表裏, 裏表, 裏裏 $\}$

$A_1 = \{$1 回目が表$\}$

$A_2 = \{$2 回目が表$\}$

$A_3 = \{$1 回目と 2 回目の結果が異なる$\}$

➜ $\left\{\begin{matrix} A_1 \text{ と } A_2 \\ A_1 \text{ と } A_3 \\ A_2 \text{ と } A_3 \end{matrix}\right\}$ は互いに独立 (前の例)

一方，$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2)\,\mathrm{P}(A_3) = \dfrac{1}{8}$

➜ A_1, A_2, A_3 は互いに独立ではない

例題 6

確率の問題でなくても確率を用いて考えると便利な場合がある
(確率的解法)

3-充足可能性問題

3 つのブール変数 (0/1 変数) をもつ和積標準系の論理式

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = C_1(x_1, x_2, x_3) \wedge C_2(x_1, x_2, x_3) \wedge C_3(x_1, x_2, x_3)$$

ここで，$y_i = \begin{cases} x_i & \text{または} \\ \overline{x_i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3)$ を用いて

$$C_j(x_1, x_2, x_3) = y_1 \vee y_2 \vee y_3 \quad (j = 1, 2, 3)$$

(例: $\Psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$)

どんな Ψ にも $\Psi(x_1, x_2, x_3) = 1$ を満たす解 $(x_1, x_2, x_3) \in \{0, 1\}^3$ が存在するか?

Yes! 上の例では $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ (解は他にも存在)

確率を用いた例題6の考え方

次の確率空間を構成:

$$\Omega = \{0,1\}^3 = \{\omega = (x_1, x_2, x_3) : \ x_i \in \{0,1\} \ (i = 1,2,3)\}$$

$$\mathrm{P}(\omega) = \frac{1}{8} \quad (\omega \in \Omega)$$

➜ $\Psi(x_1, x_2, x_3) = 1$ となる確率が正になることを示せばよい

- $C_j(x_1, x_2, x_3) = y_1 \vee y_2 \vee y_3 = 0 \ \Leftrightarrow \ y_1 = y_2 = y_3 = 0$

  ➜ $\mathrm{P}\big(C_j(x_1, x_2, x_3) = 0\big) = \dfrac{1}{8} \quad (j = 1,2,3)$

- $$\mathrm{P}\big(\Psi(x_1, x_2, x_3) = 0\big) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{j=1}^{3} \{C_j(x_1, x_2, x_3) = 0\}\right)$$

  劣加法性

  $$\leq \sum_{j=1}^{3} \mathrm{P}\big(C_j(x_1, x_2, x_3) = 0\big) = \frac{3}{8}$$

  ➜ $\mathrm{P}\big(\Psi(x_1, x_2, x_3) = 1\big) = 1 - \mathrm{P}\big(\Psi(x_1, x_2, x_3) = 0\big) \geq \dfrac{5}{8} > 0$

1. 離散確率
    - 離散確率
    - 確率の基本的な性質
    - 条件付き確率
    - 事象の独立性
    - 確率的解法
2. 離散確率変数と離散分布
    - 離散確率変数とその分布
    - 独立な確率変数
    - 期待値
    - 条件付き期待値
3. おわりに
    - 一般的な標本空間を扱うには?