

XCO.B103 情報理工学基礎 3 [全 7 回]

—第 3 回: 離散確率 (2)—

三好 直人@情報理工学院 数理・計算科学系

2024 年度 第 4Q

離散確率変数

定義 6 (離散確率変数)

(Ω, p) : 離散確率空間

X : (離散) 確率変数

↔ X は Ω から集合 $\overline{\mathbb{Z}} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\} \cup \{-\infty, \infty\}$ への関数

$i \in \overline{\mathbb{Z}}$ に対して $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = i\}$ は事象 ($\subseteq \Omega$)

- $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = i\}$ を $\{X = i\}$ と表わす
- $P(\{X = i\})$ を $P(X = i)$ と表わす

• $\overline{\mathbb{Z}}$ 上の確率質量関数 p_X が確率変数 X の確率分布または単に分布

↔ $p_X(i) := P(X = i) = \sum_{\omega \in \{X=i\}} p(\omega)$ ($i \in \overline{\mathbb{Z}}$)

- このとき 確率変数 X は分布 p_X にしたがうという
- $\sum_{i \in \mathbb{Z}} p_X(i) = 1$ ($\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$) のとき完全な分布,
 $p_X(\infty) > 0$ または $p_X(-\infty) > 0$ のとき不完全な分布という

以下, (特に断らない限り) 完全な分布だけ考える

離散確率変数の例

- コインを表が出るまで投げ続ける． 標本空間 $\Omega = \{\omega_\infty, \omega_1, \omega_2, \dots\}$

ω_i ($i = 1, 2, \dots$): i 回目に初めて表が出たことを表す標本

ω_∞ : 永久に表が出ないことを表す標本

$$p(\omega_\infty) = 0, \quad p(\omega_i) = \frac{1}{2^i} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

確率変数 X : 表が出るまで投げたコインの回数

$$X(\omega_i) = i \rightarrow p_X(i) = P(X = i) = p(\omega_i) \quad (i = 1, 2, \dots, \infty)$$

(完全な分布)

- サイコロを 2 回投げる． $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, \dots, 6\}$

確率変数 X : 2 つのサイコロの目の和

$$\{X = 5\} = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} \rightarrow P(X = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\{X = 10\} = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\} \rightarrow P(X = 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

代表的な離散確率分布

- (離散) 一様分布: n : 自然数

$$p_{\text{du}}(i) := \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

例: コインの裏 = 0, 表 = 1 ($n = 2$), サイコロの目 ($n = 6$)

- 二項分布: n : 自然数, $\alpha \in (0, 1)$

$$p_{\text{bin}}(i) := \binom{n}{i} \alpha^i (1 - \alpha)^{n-i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

例: 確率 α で表の出るコインを n 回投げるときの表の出る回数

- 幾何分布 $\alpha \in (0, 1)$

$$p_{\text{geo}}(i) := (1 - \alpha)^{i-1} \alpha \quad (i = 1, 2, \dots)$$

例: 確率 α で表の出るコインを表が出るまで投げたときの
コイン投げの回数

- ポアソン分布: $\lambda > 0$

$$p_{\text{poi}}(i) := e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

例題 7: 幾何分布の無記憶性

確率変数 X がパラメータ $\alpha \in (0, 1)$ の幾何分布にしたがう
 $X > n$ が与えられたとき, $X > n + m$ である条件付き確率は?
(n, m : 自然数)

(コインを投げ続けてずっと表が出ない. もうそろそろ表が出る?)

解答:
$$P(X > n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} (1 - \alpha)^{i-1} \alpha = (1 - \alpha)^n$$

(n 回目までに表が出ない確率)

$$\begin{aligned} \{X > n + m\} &\subset \{X > n\} \\ \rightarrow P(X > n + m \mid X > n) &= \frac{P(X > n + m)}{P(X > n)} = \frac{(1 - \alpha)^{n+m}}{(1 - \alpha)^n} \\ &= (1 - \alpha)^m = P(X > m) \end{aligned}$$

コイン投げでずっと表が出ていないからといって, 表が出やすくなる
ということはない

二項分布のポアソン分布への収束

定理 (ポアソンの小数の法則)

二項分布: $p_{\text{bin}}(i | n, \alpha) = \binom{n}{i} \alpha^i (1 - \alpha)^{n-i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$

ポアソン分布: $p_{\text{poi}}(i | \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$

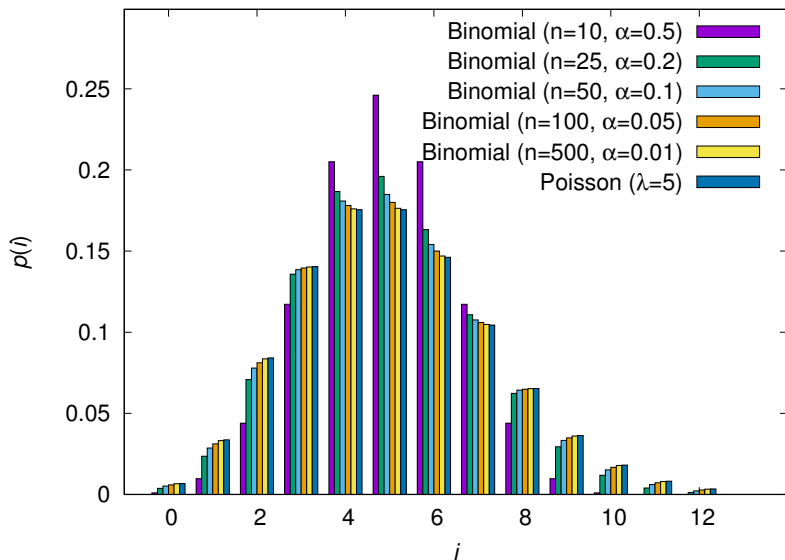
$n\alpha = \lambda$ (一定) を保ったまま $n \rightarrow \infty$ ($\alpha \rightarrow 0$) とすると

$$p_{\text{bin}}(i | n, \alpha) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} p_{\text{poi}}(i | \lambda) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

証明: $\alpha = \lambda/n$ とおく $\rightarrow$

$$\begin{aligned} p_{\text{bin}}(i | n, \lambda/n) &= \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} \\ &= \frac{\lambda^i}{i!} \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-i+1)}{n \cdot n \cdots n}}_{\downarrow 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n/\lambda \cdot \lambda}}_{\downarrow e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-i}}_{\downarrow 1} \end{aligned}$$

二項分布とポアソン分布の数値比較



確率変数の独立性

定義 7 (確率変数の独立性)

(離散) 確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が互いに独立

↔ 任意の $K_1, K_2, \dots, K_n \subseteq \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} P(X_1 \in K_1, X_2 \in K_2, \dots, X_n \in K_n) \\ = P(X_1 \in K_1) P(X_2 \in K_2) \cdots P(X_n \in K_n) \end{aligned}$$

↔ 任意の $K_1, K_2, \dots, K_n \subseteq \mathbb{Z}$ に対して

事象 $\{X_1 \in K_1\}, \{X_2 \in K_2\}, \dots, \{X_n \in K_n\}$ が互いに独立

注: $K_i = \mathbb{Z}$ とできるので ($P(X_i \in \mathbb{Z}) = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$))
事象の独立性の定義と矛盾しない

独立な確率変数の和

補題 5 (独立な確率変数の和の分布)

X, Y : 互いに独立な (離散) 確率変数

p_X, p_Y : X, Y の分布

→ $Z = X + Y$ の分布

$$p_Z(k) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_X(i) p_Y(k - i), \quad k \in \mathbb{Z}$$

この右辺を p_X と p_Y のたたみ込みという

証明: $k \in \mathbb{Z}$ に対して

分割公式 $\left(\{Z = k\} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \{X = i, Y = k - i\} \right)$

$$p_Z(k) = P(Z = k) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} P(X = i, Y = k - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} P(X = i) P(Y = k - i)$$

互いに独立

例題 8: ポアソン分布の再生性

確率変数 X, Y は互いに独立で、それぞれパラメータ $\lambda > 0, \mu > 0$ のポアソン分布にしたがう

→ $Z = X + Y$ の分布は?

解答: $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} p_Z(k) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_X(i) p_Y(k-i) = \sum_{i=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \times e^{-\mu} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i! (k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} \end{aligned}$$

→ $Z = X + Y$ はパラメータ $\lambda + \mu$ のポアソン分布にしたがう

期待値

定義 8 (離散確率変数 [離散確率分布] の期待値)

確率変数 X の分布 $p_X: \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]$

$$X \text{ (または } p_X) \text{ の期待値: } E(X) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} i p_X(i)$$

期待値の存在? $E(X) = \sum_{i < 0} i p_X(i) + \sum_{i > 0} i p_X(i)$

- $\sum_{i > 0} i p_X(i) = - \sum_{i < 0} i p_X(i) = +\infty$

→ 期待値は定義できない (存在しない)

- $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |i| p_X(i) = \sum_{i > 0} i p_X(i) - \sum_{i < 0} i p_X(i) < \infty$

→ 有限の期待値が存在

- 上記以外 → 期待値は $(+\infty$ または $-\infty$ に) 発散

代表的な確率分布の期待値

- (離散) 一様分布: $p_{\text{du}}(i) = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

$$M_{\text{du}} = \sum_{i=1}^n i \times \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

- 二項分布: $p_{\text{bin}}(i) = \binom{n}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{n-i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$

$$M_{\text{bin}} = \sum_{i=0}^n i \frac{n!}{i! (n-i)!} \alpha^i (1-\alpha)^{n-i} = n\alpha$$

- 幾何分布 $p_{\text{geo}}(i) = (1-\alpha)^{i-1} \alpha \quad (i = 1, 2, \dots)$

$$M_{\text{geo}} = \sum_{i=1}^{\infty} i (1-\alpha)^{i-1} \alpha = \frac{1}{\alpha}$$

- ポアソン分布: $p_{\text{poi}}(i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$

$$M_{\text{poi}} = \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda$$

期待値が発散する例／存在しない例

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ (バーゼル問題) より}$$

$$\textcircled{1} p_X(i) = \frac{6}{\pi^2 i^2} \quad (i = 1, 2, \dots) \rightarrow E(X) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{1}{i^2} = \infty$$

$$\textcircled{2} p_X(i) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^2 i^2} & (i = \pm 1, \pm 2, \dots) \\ 0 & (i = 0) \end{cases}$$

$$\rightarrow -\sum_{i<0} i p_X(i) = \sum_{i>0} i p_X(i) = +\infty \text{ (期待値は存在しない)}$$

$$\text{注: } \sum_{i=-n}^n i p_X(i) = 0 \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} E(X) = 0 \text{ ではない}$$

確率変数の関数の期待値

補題 6

$h: \mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への関数

確率変数 X の分布: $p_X: \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]$

→ $Y = h(X)$ の期待値: $E(Y) = E(h(X)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} h(i) p_X(i)$

証明: Y の分布

$$p_Y(j) = P(Y = j) = P(h(X) = j) = \sum_{i: h(i)=j} p_X(i) \quad (j \in \mathbb{Z})$$

→ $E(Y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} j p_Y(j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} j \sum_{i: h(i)=j} p_X(i) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i: h(i)=j} h(i) p_X(i)$

$\Downarrow$
 $\sum_{i \in \mathbb{Z}}$

例題 9

サンクトペテルブルグのパラドックス

参加費を払うと次のゲームに参加できる

公平なコインを表が出るまで投げ、初めて表が出たのが i 回目であれば賞金 2^{i-1} 万円を受け取る

参加費がいくらならこのゲームに参加する？

参考:

X : 表が出るまで投げたコインの回数 $\rightarrow P(X = i) = \frac{1}{2^i} \ (i = 1, 2, \dots)$

- 賞金の期待値: $E(2^{X-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \frac{1}{2^i} = \infty$ (無限大の富が手に入る?)

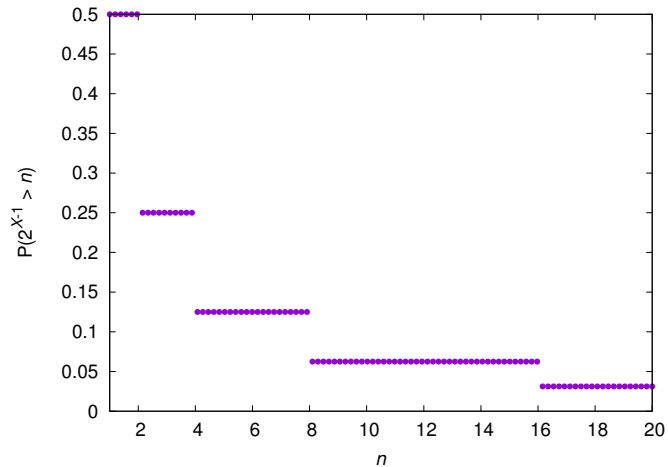
- 賞金が n 万円より大きくなる確率:

$$P(2^{X-1} > n) = P(X > \log_2 n + 1) = \frac{1}{2^{\lfloor \log_2 n + 1 \rfloor}}$$

たとえば、賞金が 10 万円より大きくなる確率は $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

(確率 $\frac{15}{16} \approx 0.9375$ で賞金は 8 万円以下)

例題 9 の数値結果



確率変数の関数の期待値 (多変数)

$h: \mathbb{Z}^n$ から $\mathbb{Z}$ への関数

確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ の確率分布 (同時確率分布):

$$p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, \dots, i_n) = P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n) \\ (i_k \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, \dots, n)$$

$Z = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ の期待値:

$$E(Z) = E(h(X_1, \dots, X_n)) = \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{i_n \in \mathbb{Z}} h(i_1, \dots, i_n) p_{\mathbf{X}}(i_1, \dots, i_n)$$

期待値の線形性

補題 7

X, Y : (離散) 確率変数

a, b : 整数

$$E[|X|] < \infty, E[|Y|] < \infty \rightarrow E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

証明:

$$\begin{aligned} E(aX + bY) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (ai + bj) P(X = i, Y = j) \\ &= a \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \underbrace{\sum_{j \in \mathbb{Z}} P(X = i, Y = j)}_{\parallel P(X = i)} + b \sum_{j \in \mathbb{Z}} j \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{Z}} P(X = i, Y = j)}_{\parallel P(Y = j)} \\ &= a \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \underbrace{P(X = i)}_{\parallel E(X)} + b \sum_{j \in \mathbb{Z}} j \underbrace{P(Y = j)}_{\parallel E(Y)} = aE(X) + bE(Y) \end{aligned}$$

例題 10

n 人がそれぞれ 1 つずつプレゼントを持ち寄り、一旦回収したあとランダムに 1 つずつプレゼントを配る

自分が持ってきたプレゼントを受け取る人の数 N の期待値 M_n は?

解答: $i = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$X_i = \begin{cases} 1 & (i \text{ 番の人が自分のプレゼントを受け取る}) \\ 0 & (i \text{ 番の人が自分のプレゼントを受け取らない}) \end{cases}$$

とすると $N = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$$E(X_i) = 1 \times P(X_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\rightarrow M_n = E(N) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = \frac{1}{n} \times n = 1$$

例題 11

n 種類のおもちゃが 1 つずつカプセルに入って売られている自動販売機があり、カプセルを 1 つ買うとどれか 1 つのおもちゃが確率 $\frac{1}{n}$ で手に入る

すべての種類のおもちゃを少なくとも 1 つ手に入れるために買わなければいけないカプセルの数 X_n の期待値 M_n は？

例題 11 の解答

いま k 種類のおもちゃを持っているとする ($k = 0, 1, \dots, n-1$)

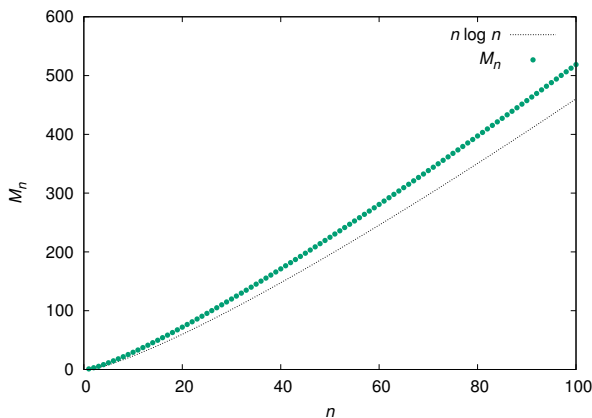
- ① 次のカプセルで持ってないおもちゃが手に入る確率: $\frac{n-k}{n}$
- ② 持ってないおもちゃを 1 つ手に入れるまでに買わなければいけないカプセルの数 $X_{n,k}$ の分布:

$$P(X_{n,k} = i) = \left(1 - \frac{n-k}{n}\right)^{i-1} \frac{n-k}{n} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (\text{幾何分布})$$

$$\textcircled{3} \rightarrow E(X_{n,k}) = \frac{n}{n-k}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow E(X_n) &= E(X_{n,0} + X_{n,1} + \dots + X_{n,n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} E(X_{n,k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \end{aligned}$$

例題 11 (カプセルおもちゃ問題) の数値結果



たとえば $M_4 \approx 8.333$, $M_7 \approx 18.150$, $M_{10} \approx 29.290$, $M_{26} \approx 100.215$

$$\frac{M_n}{n \log n} = \frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \left(\because \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} \right)$$

条件付き期待値

定義 9 (条件付き確率分布と条件付き期待値)

A : 事象 ($A \subseteq \Omega$), $P(A) > 0$

X : (離散) 確率変数

事象 A が与えられたときの X の条件付き確率分布:

$$p_X(i | A) := P(X = i | A) = \frac{P(\{X = i\} \cap A)}{P(A)} \quad (i \in \mathbb{Z})$$

事象 A が与えられたときの X の条件付き期待値:

$$E(X | A) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} i p_X(i | A)$$

全確率の公式

補題 8 (全確率の公式)

X : (離散) 確率変数

$A_1, A_2, \dots, A_n$: Ω の分割 ($A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) かつ $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$)

$P(A_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) $\rightarrow$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n P(A_i) E(X | A_i)$$

$n = \infty$ でも成立

証明:

分割公式

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} i P(X = i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \sum_{j=1}^n P(A_j \cap \{X = i\}) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \sum_{j=1}^n P(A_j) P(X = i | A_j) = \sum_{j=1}^n P(A_j) E(X | A_j) \end{aligned}$$

例題 12

クイックソート・アルゴリズム

n 個の数の集合 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ の要素を小さい順に並べるため次の「クイックソート」と呼ばれるアルゴリズムを用いる

- ① S から 1 つの数 (a とする) をランダムに選ぶ
- ② S の残りの (a 以外の) 要素を 1 つずつ a と比較し, a より小さい数の集合 S_1 と a より大きい数の集合 S_2 に分ける
- ③ 集合 S_1 と S_2 に対して ①~③ の操作を繰り返す

小さい順に並べられるまでの 1 対比較の回数の期待値 M_n は?

(参考: バブルソート・アルゴリズム)

小さいものから順に (勝ち抜き戦の要領で) 見つけていく方法
この場合, 1 対比較の回数は

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

例題 12 の解答 (1/2)

X_n : n 個の数を並べるまでの 1 対比較の回数 ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$A_i := \{ \text{最初に選んだ数 } a \text{ が } i \text{ 番目に小さい} \}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

$M_0 = M_1 = 0$ は明らか. $n \geq 2$ とする

事象 A_i が与えられたとき $\rightarrow S_1$ の要素数: $i - 1$, S_2 の要素数: $n - i$

$$\rightarrow M_n = E(X_n) = \sum_{i=1}^n \underbrace{P(A_i)}_{\frac{1}{n}} \underbrace{E(X_n | A_i)}_{n-1 + E(X_{i-1}) + E(X_{n-i})} \quad (\text{全確率の公式})$$

$$= n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (M_{i-1} + M_{n-i}) = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i$$

$$\Leftrightarrow n M_n = n(n-1) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} M_i$$

例題 12 の解答 (2/2)

$$n M_n = n(n-1) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} M_i \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{同様に } (n-1) M_{n-1} = (n-1)(n-2) + 2 \sum_{i=0}^{n-2} M_i \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2} \rightarrow$

$$n M_n - (n-1) M_{n-1} = 2(n-1) + 2 M_{n-1}$$

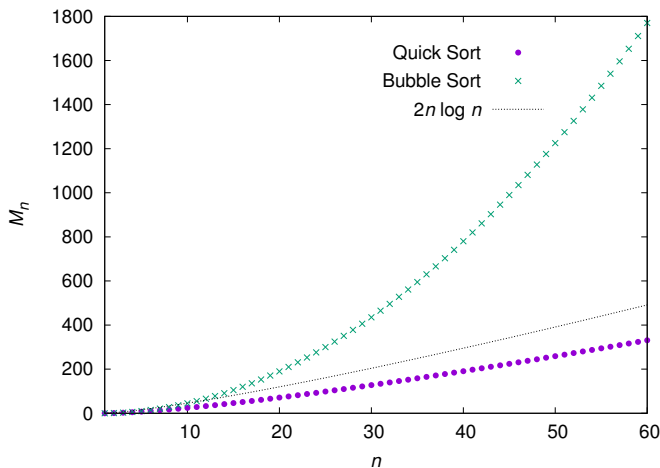
$$\Leftrightarrow n M_n = (n+1) M_{n-1} + 2(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_n}{n+1} = \frac{M_{n-1}}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} = \underbrace{\frac{M_1}{2}}_{\substack{\parallel \\ 0}} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{\underbrace{(i+1)(i+2)}_{\substack{\parallel \\ \frac{2}{i+2} - \frac{1}{i+1}}}}$$

$$= 2 \left(\sum_{i=3}^{n+1} \frac{2}{i} - \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \right) = 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \frac{4n}{n+1}$$

$$\rightarrow M_n = 2(n+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - 4n$$

例題 12 (クイックソートとバブルソート) の数値比較



$$\frac{M_n}{2n \log n} = \frac{n+1}{n} \frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \frac{2}{\log n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

一般的な標本空間を扱うには？

例: 長さ 1 の区間 $[0, 1]$ からランダムに 1 点を選ぶ

→ 標本空間 $\Omega = [0, 1]$ (連続体)

総和が 1 になるように各標本 $\omega \in \Omega$ に確率を割り当てようとする
高々可算個の標本にしか正の確率を割り当てることができない!

(和は高々可算個の数にしか定義されない)

- 確率を (個々の標本ではなく) 標本の集合 (Ω の部分集合) に割り当てる
- Ω の部分集合に $[0, 1]$ の実数に対応付ける集合関数 (測度) として確率 P を定義する (測度論の援用)
- 期待値は Ω 上の関数の確率測度による積分 (ルベーグ積分の援用)

数理・計算科学系では

- 2 年生で (なるべく測度論・ルベーグ積分論に立ち入らずに) 一般の確率空間を学修する
- 3 年生でルベーグ積分を学修する