

I. $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ が状態空間 $\mathcal{S}$ 上のマルコフ連鎖であるとき、次を示しなさい。

- (1) $n, m \in \mathbb{N}, i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in \mathcal{S}$ に対して,

$$P(X_{n+m} = j \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+m} = j \mid X_n = i).$$
- (2) $n, m \in \mathbb{N}, i, j, k \in \mathcal{S}$ に対して,

$$P(X_0 = i, X_{n+m} = k \mid X_n = j) = P(X_0 = i \mid X_n = j) P(X_{n+m} = k \mid X_n = j).$$

II. 次の問いに答えなさい。

- (1) 次の推移確率行列を持つマルコフ連鎖の定常分布 $\pi = (\pi_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ を求めなさい。

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/5 & 0 & 2/5 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

次のような $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, r\}$ 上の情報源を考える。すなわち、現れる情報源記号の列 $\mathbf{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は $\mathcal{S}$ 上のマルコフ連鎖であり、

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{i,j}, \quad i, j \in \mathcal{S},$$

を満たす。

- (2) $X_n = i$ が与えられたとき、時点 $n+1$ での (条件付き) エントロピーを $p_{i,j}, i, j \in \mathcal{S}$, を用いて表しなさい。[ヒント: 確率 p で生起する事象が持つ情報量は $-\log p$. エントロピー = 情報量の期待値.]
- (3) $r = 3$ かつ $P = (p_{i,j})_{i,j \in \mathcal{S}}$ が (1) の推移確率行列で与えられるとき、定常状態におけるこの情報源のエントロピーをなるべく簡単な形で表しなさい (対数の底を 2, 真数を素数とすること)。[ヒント: (1) の定常分布を用いて (2) のエントロピーの条件を外す.]

III. 状態空間 $\mathcal{S}$ 上で既約なマルコフ連鎖の推移確率行列 $P = (p_{i,j})_{i,j \in \mathcal{S}}$ が定常分布 $\pi = (\pi_i)_{i \in \mathcal{S}}$ を持ち、かつ次の性質を満たすとする。 $\mathcal{S}$ の空でない真部分集合 C と状態 $a \in C$ が存在して、

$$\sum_{j \in C} p_{i,j} = p_{i,a}, \quad i \in \mathcal{S} \setminus C \quad (\text{言い換えると } p_{i,j} = 0, i \in \mathcal{S} \setminus C, j \in C \setminus \{a\}).$$

このとき、 C 上のマルコフ連鎖の推移確率行列 $Q = (q_{i,j})_{i,j \in C}$ を次のように定める。

$$q_{i,j} = \begin{cases} p_{i,j}, & j \in C \setminus \{a\}, \\ p_{i,a} + \sum_{k \in \mathcal{S} \setminus C} p_{i,k}, & j = a. \end{cases}$$

推移確率行列 Q に対する定常分布 $\nu = (\nu_i)_{i \in C}$ が存在するか、存在するならば $(\pi_i)_{i \in \mathcal{S}}$ を用いて表しなさい。

IV. 持ち込んだ資料を教えてください。