平成 25 年度後期　　モデル解析中間試験問題　　平成 25 年 11 月 26 日（火）

（担当: 三好）

I. 情報源アルファベットを $\mathcal{S}=\{0,1,2\}$ として，情報源記号の列 $\boldsymbol{X}=(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ が $\mathcal{S}$ 上のマルコフ連鎖として現れる情報源を考える．

(1) マルコフ連鎖 $\boldsymbol{X}$ の推移確率行列を $\boldsymbol{P}=(p_{i,j})_{i,j\in\mathcal{S}}$, $p_{i,j}=\mathsf{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$ $(i,j\in\mathcal{S})$ とする．$X_n=i$ が与えられたとき，時点 $n+1$ での (条件付き) エントロピーを $p_{i,j}$ $(i,j\in\mathcal{S})$ を用いて表しなさい．[ヒント: 確率 p で生起する事象が持つ情報量は $-\log p$ であり，エントロピーは情報量の期待値として定義される．]

(2) マルコフ連鎖 $\boldsymbol{X}$ の推移確率行列が，

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/5 & 0 & 2/5 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \end{array}$$

で与えられるとき，このマルコフ連鎖の定常分布 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_i)_{i\in\mathcal{S}}$ を求めなさい．

(3) この情報源の定常状態でのエントロピーをなるべく簡単な形で表しなさい (対数の底を 2，真数を素数とすること)．[ヒント: (1), (2) の結果と全確率の公式を用いれば良い．]

II. $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を互いに独立で同一の分布にしたがう $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ 上の確率変数列とする．U_1 の確率分布を $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\alpha_i=\mathsf{P}(U_1=i)$ $(i=1,2,\ldots)$ として，以下の問いに答えなさい．

(1) $T_0=0$ かつ $T_k=\sum_{j=1}^{k}U_j$ $(k=1,2,\ldots)$ とする．確率変数列 $\boldsymbol{X}=(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を

$$X_n=n-\max_{k\geq 0}\{T_k\leq n\}\quad (n=0,1,2,\ldots)$$

と定義したとき，$\boldsymbol{X}$ が状態空間 $\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\ldots\}$ 上のマルコフ連鎖となることを示しなさい．

(2) マルコフ連鎖 $\boldsymbol{X}$ の推移確率 $p_{i,j}=\mathsf{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$ $(i,j\in\mathbb{Z}_+)$ を α_i および $\beta_i=\sum_{j=1}^{i}\alpha_j$ $(i=1,2,\ldots)$ を用いて表しなさい．

(3) $\alpha_i>0$ $(i=1,2,\ldots)$ のとき，マルコフ連鎖 $\boldsymbol{X}$ が状態空間 $\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\ldots\}$ 上で既約となることを示しなさい．

(4) $R_0=\inf\{n\in\mathbb{N} \mid X_n=0\}$ とする．$\mathsf{P}(R_0=n \mid X_0=0)$ を α_i $(i=1,2,\ldots)$ を用いて表しなさい．

(5) マルコフ連鎖 $\boldsymbol{X}$ が再帰的であることを示しなさい．

(6) U_1 の期待値を $m=\sum_{i=1}^{\infty} i\,\alpha_i$ とする．マルコフ連鎖 $\boldsymbol{X}$ が定常分布 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ を持つための条件を m を用いて表しなさい．

(7) (6) の条件のもとで，マルコフ連鎖 $\boldsymbol{X}$ の定常確率 π_i $(i=0,1,2,\ldots)$ を m と β_i を用いて表しなさい．

III. 講義の感想を書いてください．講義に出席していなかった者は，この試験を受けるに当たってどのように準備を行ったのか，なるべく具体的に書いてください．