

以下, P , E はそれぞれ確率と期待値を表すものとする.

I. F, G をそれぞれ 1 次元確率分布関数とする.

$$\overline{H}(x, y) = \min\{F(x), G(y)\}, \quad \underline{H}(x, y) = \max\{F(x) + G(y) - 1, 0\}$$

として以下の問いに答えなさい.

(i) F, G がともに逆関数 F^{-1}, G^{-1} をもつものとする. U を $[0, 1]$ 上の一様分布にしたがう確率変数とするととき, 以下を示しなさい.

$$(a) P(F^{-1}(U) \leq x, G^{-1}(U) \leq y) = \overline{H}(x, y)$$

$$(b) P(F^{-1}(U) \leq x, G^{-1}(1 - U) \leq y) = \underline{H}(x, y)$$

(ii) X, Y を結合分布関数 H にしたがう実数値確率変数とする ($H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$). X, Y の周辺分布関数をそれぞれ F, G , とするとき, 以下が成り立つことを示しなさい.

$$\underline{H}(x, y) \leq H(x, y) \leq \overline{H}(x, y)$$

II. 実数値確率変数 X と Y は互いに独立で, それぞれ確率密度関数,

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad f_Y(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1], \end{cases}$$

をもつものとする. このとき $X + Y$ の確率密度関数を求めなさい.

III. X を非負確率変数, F をその分布関数とする. 実数 α に対して $E(e^{\alpha X}) < \infty$ のとき, 以下の等式が成り立つことを示しなさい.

$$E(e^{\alpha X}) = \alpha \int_0^\infty e^{\alpha x} (1 - F(x)) dx + 1$$

ただし, 実数 x に依存する非負確率変数 $Y(x)$ に対して,

$$\int_0^\infty E(Y(x)) dx = E\left(\int_0^\infty Y(x) dx\right) \text{ が成り立つことは証明なしで用いて構わない.}$$

IV. 確率変数列 $X_1, X_2, \dots$ は互いに独立で, 以下で与えられる同一の分布にしたがう.

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(i) X_1 の積率母関数 $M(s) = E(e^{sX_1})$ を求めなさい.

(ii) $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$ の積率母関数を $M_n(s)$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(s)$ を求めなさい. た

だし, $ng(n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を満たす関数 g に対して $\left(1 + \frac{1}{n} + g(n)\right)^n \rightarrow e$ ($n \rightarrow \infty$) は証明なしで用いて構わない.

解答例

- I. (i) (a) F, G とともに単調増加なので, $\mathbf{P}(F^{-1}(U) \leq x, G^{-1}(U) \leq y) = \mathbf{P}(U \leq F(x), U \leq G(y)) = \mathbf{P}(U \leq \min\{F(x), G(y)\})$. U の確率分布関数 F_U は $x \in [0, 1]$ に対して $F_U(x) = x$ となるので, $\mathbf{P}(U \leq \min\{F(x), G(y)\}) = \min\{F(x), G(y)\}$.
- (b) 上と同様に, $\mathbf{P}(F^{-1}(U) \leq x, G^{-1}(1-U) \leq y) = \mathbf{P}(1-G(y) \leq U \leq F(x))$

$$= \begin{cases} F(x) + G(y) - 1, & F(x) \geq 1 - G(y) \text{ のとき,} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$= \max\{F(x) + G(y) - 1, 0\}.$$
- (ii) $H(x, y) = \mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y) \leq \mathbf{P}(X \leq x) = F(x)$. 同様に, $H(x, y) \leq \mathbf{P}(Y \leq y) = G(y)$. よって $H(x, y) \leq \min\{F(x), G(y)\}$.
 一方, 確率の加法法則より $\mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbf{P}(X \leq x) + \mathbf{P}(Y \leq y) - \mathbf{P}(\{X \leq x\} \cup \{Y \leq y\}) \geq F(x) + G(y) - 1$. また, $\mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y) \geq 0$ なので $H(x, y) \geq \max\{F(x) + G(y) - 1, 0\}$.
- (i), (ii) より, $\overline{H}, \underline{H}$ はそれぞれ, 周辺分布関数 F, G をもつ 2 次元結合分布関数のうち最大, 最小のものである.

- II. たたみ込みにおいて f_X, f_Y が正となる範囲に注意する. $x \geq 0$ に対して,

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y) f_Y(y) dy = \int_0^{\min\{x, 1\}} e^{-(x-y)} dy = e^{-x} \int_0^{\min\{x, 1\}} e^y dy = e^{-x} (e^{\min\{x, 1\}} - 1).$$
 一方, $x < 0$ では $f_{X+Y}(x) = 0$.

III.
$$\alpha \int_0^{\infty} e^{\alpha x} (1 - F(x)) dx = \alpha \int_0^{\infty} e^{\alpha x} \mathbf{P}(X > x) dx = \alpha \int_0^{\infty} e^{\alpha x} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{X > x\}}) dx$$

$$= \alpha \mathbf{E}\left(\int_0^{\infty} e^{\alpha x} \mathbf{1}_{\{X > x\}} dx\right) = \alpha \mathbf{E}\left(\int_0^X e^{\alpha x} dx\right) = \mathbf{E}(e^{\alpha X}) - 1.$$

IV. (i) $M(s) = \mathbf{E}(e^{sX_1}) = \frac{e^s + e^{-s}}{2}$ (これは双曲線関数 $\cosh s$ である).

(ii)
$$M_n(s) = \mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{s}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i\right)\right] = \{\mathbf{E}[e^{sX_1/\sqrt{n}}]\}^n = \left\{M\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n$$

$$= \left\{\frac{e^{s/\sqrt{n}} + e^{-s/\sqrt{n}}}{2}\right\}^n.$$

ここで, $e^{s/\sqrt{n}} = 1 + \frac{s}{\sqrt{n}} + \frac{s^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $e^{-s/\sqrt{n}} = 1 - \frac{s}{\sqrt{n}} + \frac{s^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ より,

$$\frac{e^{s/\sqrt{n}} + e^{-s/\sqrt{n}}}{2} = 1 + \frac{s^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
 よって, $M_n(s) = \left\{1 + \frac{s^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^n \rightarrow e^{s^2/2} \quad (n \rightarrow \infty).$