

(講義の要点を A4 の紙 2 枚以内にまとめたものの持ち込み可)

以下, P , E , Var はそれぞれ確率, 期待値, 分散を表すものとする.

- I. X をパラメータ $\lambda (> 0)$ の指数分布にしたがう確率変数とする. すなわち, X の確率密度関数を f_X とすると,

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$Y = \lfloor X \rfloor$, $Z = X - Y$ とする. ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数を表す.

- (i) Y の確率質量関数を求めなさい.
- (ii) $x \in [0, 1)$ に対して $P(Z \leq x) = P(X \leq x \mid X \leq 1)$ が成り立つことを示しなさい.
- (iii) Y と Z が互いに独立であることを示しなさい.

- II. $\mathbb{N}_0$ を非負整数の集合, $\mathbb{R}_+$ を非負実数の集合とする. 非負整数値をとる確率変数 X と実数 $p \in (0, 1)$ に対して次の 2 つの命題を考える.

- (A) X は $P(X = k) = (1 - p)^k p$, $k = 0, 1, 2, \dots$, を満たす.
- (B) $g(0) = 0$ を満たす $\mathbb{N}_0$ から $\mathbb{R}_+$ への関数 g に対して次の等式が成り立つ.

$$E[g(X)] = (1 - p) E[g(X + 1)]$$

- (i) (A) から (B) が導かれることを示しなさい.
- (ii) (B) から (A) が導かれることを示しなさい [ヒント: 適当な関数 g を選ぶ].

- III. 確率変数列 $X_1, X_2, \dots$ は, 同一かつ有限の期待値 μ と同一かつ有限の分散 σ^2 をもち, その共分散は $\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{\sigma^2}{2^{|j-i|}}$ を満たす. 確率変数列 $Y_1, Y_2, \dots$ を以下で定義する.

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

- (i) $E(Y_n)$ を求めなさい (n, μ, σ , またはその一部を用いて表しなさい).
- (ii) $\text{Var}(Y_n)$ を求めなさい (n, μ, σ , またはその一部を用いて表しなさい).
- (iii) Y_n , $n = 1, 2, \dots$, が μ に確率収束することを示しなさい.

解答例

- I. (i) $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$P(Y = k) = P(k \leq X < k + 1) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda k}.$$

すなわち, パラメータ $1 - e^{-\lambda}$ の幾何分布である.

- (ii) 全確率の公式 (分割公式) より, $x \in [0, 1)$ に対して,

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k, Z \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k \leq X \leq k + x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+x)}) = (1 - e^{-\lambda x}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k} = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{P(X \leq x)}{P(X \leq 1)}. \end{aligned}$$

- (iii) $k = 0, 1, 2, \dots, x \in [0, 1)$ に対して,

$$\begin{aligned} P(Y = k, Z \leq x) &= P(k \leq X \leq k + x) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+x)} = (1 - e^{-\lambda x}) e^{-\lambda k} \\ &= (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda k} \times \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} = P(Y = k) P(Z \leq x). \end{aligned}$$

- II. (i) $g(0) = 0$ に注意して,

$$E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k p g(k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k+1} p g(k+1) = (1-p) E[g(X+1)].$$

- (ii) $k = 1, 2, \dots$ に対して $g(x) = \mathbf{1}_{\{k\}}(x) = \begin{cases} 1, & x = k \\ 0, & x \neq k \end{cases}$ とすると, (B) より,

$$P(X = k) = (1-p) P(X = k-1).$$

これより, $P(X = k) = (1-p)^k P(X = 0)$ であり, これは $k = 0$ のときも成立.

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = P(X = 0) \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{P(X = 0)}{p} = 1$$

より $P(X = 0) = p$. よって, $P(X = k) = (1-p)^k p, k = 0, 1, 2, \dots$

- III. (i) 期待値の線形性より,

$$E[Y_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \mu.$$

- (ii) X_i, X_j ($i \neq j$) が互いに独立ではないことに注意する.

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_n) &= \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \right\} \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2} \left(3n - 4 + \frac{1}{2^{n-2}} \right). \end{aligned}$$

- (iii) チェビシエフの不等式 (マルコフの不等式) と (ii) の結果から,

$$P(|Y_n - \mu| > \epsilon) = P((Y_n - \mu)^2 > \epsilon^2) \leq \frac{\text{Var}(Y_n)}{\epsilon^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$