

(講義の要点を A4 の紙 2 枚以内にまとめたものの持ち込み可)

- I. $\mathbb{R}$ を実数の集合, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上のボレル集合体とし, X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率変数とする. Ω の部分集合族 (部分集合の集合) $\sigma(X)$ を

$$\sigma(X) = \{ \{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B \} \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$$

と定義するとき, $\sigma(X)$ は Ω 上の σ -集合体であることを示しなさい.

- II. X を実数値確率変数として, $Y = \frac{1}{X}$ とする. ただし $X = 0$ のときは $Y = 0$ とする.

(i) X の分布関数を F とするとき, Y の分布関数 $G(x) = P(Y \leq x)$ を F を用いて表しなさい. ただし, 点 a における F の左極限 $\lim_{x \uparrow a} F(x)$ を $F(a-)$ と表すこととする.

(ii) $a > 0$ として, X の分布が次の確率密度関数

$$f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}, \quad -\infty < x < \infty,$$

を持つものとする. このとき Y の期待値が存在する (定義できる) ならばそれを求め, 期待値が存在しない (定義できない) ならばそのことを示しなさい.

- III. F を $F(0) = 0$ かつ $F(x) > 0$ ($x > 0$) を満たす分布関数とし, $X_1, X_2, \dots$ を互いに独立に分布 F にしたがう確率変数列とする. $Y_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ($n \geq 1$) とし以下の (i), (ii), (iii) に答えなさい. ただし, (ii) は (iii) を使わずに示すこと.

(i) Y_n の分布関数を F, n を用いて表しなさい.

(ii) $n \rightarrow \infty$ とするとき Y_n は 0 に確率収束することを示しなさい.

(iii) $n \rightarrow \infty$ とするとき Y_n は 0 に概収束することを示しなさい.

[ヒント: 事象 $\{\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0\}$ を $\cup, \cap$, および $\{|Y_n| < \frac{1}{\ell}\}$ ($\ell = 1, 2, \dots$) を用いて表す.]

解答例

- I. (i) X は Ω から $\mathbb{R}$ への関数なので, $B = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とすると $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \mathbb{R}\} = \Omega$. よって $\Omega \in \sigma(X)$.
- (ii) $A \in \sigma(X)$ とすると, $\sigma(X)$ の定義より $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$ となる $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が存在する. このとき $B^c = \mathbb{R} \setminus B$ に対して, $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ かつ $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B^c\} = A^c$ であるから $A^c \in \sigma(X)$.
- (iii) $A_1, A_2, \dots \in \sigma(X)$ とすると, $\sigma(X)$ の定義より, 各 $i = 1, 2, \dots$ に対して $A_i = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B_i\}$ となる $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が存在する. このとき $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ かつ $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ であるから $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma(X)$.

- II. (i) x の範囲に注意して,

$$G(x) = P(Y \leq x) = \begin{cases} P\left(\frac{1}{x} \leq X < 0\right) = F(0-) - F\left(\frac{1}{x}-\right), & x < 0, \\ P(X \leq 0) = F(0), & x = 0, \\ P\left(X \leq 0 \text{ または } X \geq \frac{1}{x}\right) = F(0) + 1 - F\left(\frac{1}{x}-\right), & x > 0. \end{cases}$$

- (ii) (i) より Y の確率密度関数は,

$$g(x) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1/a}{\pi(x^2 + 1/a^2)}, \quad -\infty < x < \infty,$$

である (このとき X, Y はそれぞれパラメータ $a, 1/a$ のコーシー分布にしたがうと言い, コーシー分布にしたがう確率変数の逆数はまたコーシー分布にしたがうことが分かる). このとき,

$$E(Y \mathbf{1}_{\{Y > 0\}}) = \int_0^{\infty} x g(x) dx = +\infty$$

(この計算は高校数学の範囲なので省略). 同様に, $-E(Y \mathbf{1}_{\{Y < 0\}}) = +\infty$ であるから Y の期待値は定義できない (コーシー分布は期待値が定義できない).

- III. (i) $P(Y_n \leq x) = P(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq x) = 1 - P(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > x) = 1 - P(X_1 > x) P(X_2 > x) \cdots P(X_n > x) = 1 - (1 - F(x))^n$.
- (ii) $\epsilon > 0$ に対して, $P(|Y_n| > \epsilon) = P(Y_n > \epsilon) = (1 - F(\epsilon))^n$. $0 < F(\epsilon) \leq 1$ より $0 \leq 1 - F(\epsilon) < 1$ なので $(1 - F(\epsilon))^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).
- (iii) 一般に, 確率変数 Z と確率変数列 $Z_1, Z_2, \dots$, に対して

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z \right\} = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \left\{ |Z_k - Z| < \frac{1}{\ell} \right\}$$

(すべての $\ell > 0$ に対してある n が存在して, n 以上のすべての k に対して $|Z_k - Z| < \frac{1}{\ell}$). いま, $Y_n > 0$ a.s. かつ Y_n は単調非増加列なので $\{|Y_n| < \frac{1}{\ell}\}$ は n に関して単調増加列であり, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{|Y_k| < \frac{1}{\ell}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Y_n < \frac{1}{\ell}\}$. さらに, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{Y_n < \frac{1}{\ell}\}$ は ℓ に関して単調減少列であるから,

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0\right) = P\left(\bigcap_{\ell=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{Y_n < \frac{1}{\ell}\right\}\right) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(Y_n < \frac{1}{\ell}\right).$$

ここで $P\left(Y_n < \frac{1}{\ell}\right) = 1 - \left(1 - F\left(\frac{1}{\ell}-\right)\right)^n \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$).