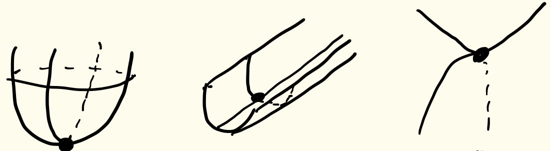
第1回 (1/7) 「曲率とオイラー数 ーとんがり度からガウスボンネへー」 ref. 2006年度 高校生のための現代数学講座 「多角形と多面体の曲率」 森田茂之

1. Intro
2. 多角形のとんがり度
3. 多面体のとんがり度
4. とんがり度とオイラー標数
5. 発展

1. "ガウスボンネの定理"

曲面の曲率(まがり具合)のたし合わせ ⇝ 曲面の大局的な性質

曲率：

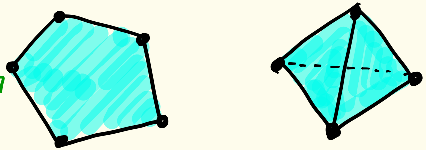


正　　0　　負

(局所的な性質)

境界あり　　境界なし

トイモデル →



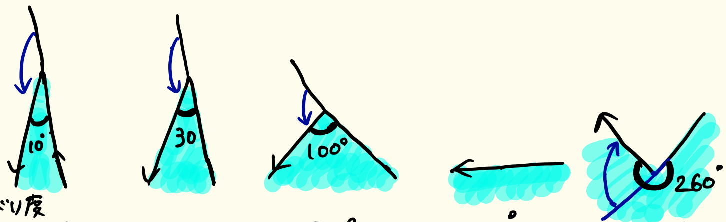
まがり具合が集中している。

多角形 や 多面体

で考察してみよう。

2. 多角形

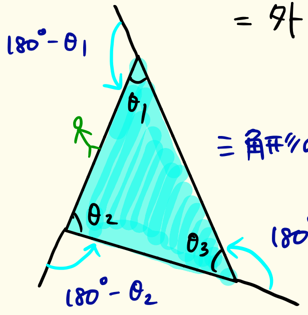
1つの頂点(角)のとんがり度 := 180° − 内角 = 外角.



とんがり度
170°　150°　80°　0°　−80°

多角形のとんがり度 = 各頂点のとんがり度の総和

= 外角の総和

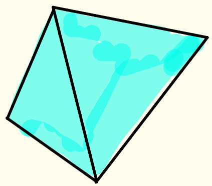


三角形のとんがり度 $= 180^\circ\times3-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$

$= 360^\circ$

(直感的には人が一周歩くから360°)

四角形のとんがり度



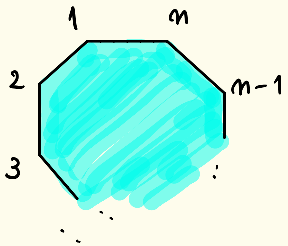
内角の和 $= 180^\circ\times2 = 360^\circ$

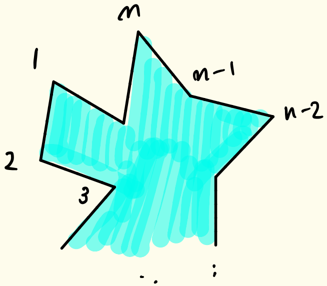
とんがり度

$= (180^\circ\times4) - 360^\circ$

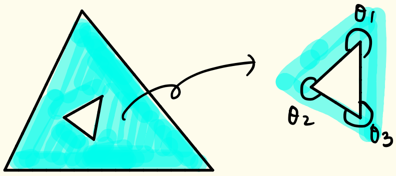
$= 360^\circ$

Q. 凸n角形のとんがり度? (凸じゃないn角形のバアイは?)





S. Suzuki



内にある三角形の
とんがり度

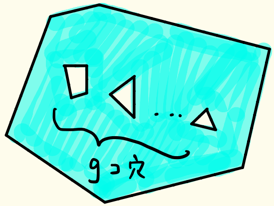
$$= (180^\circ \times 3) - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$= (180^\circ \times 3) - (360^\circ \times 3 - 180^\circ)$$

$$= -360^\circ$$

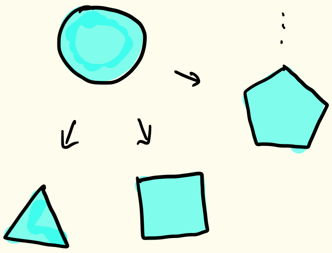
穴あき三角形のとんがり度

$$= \underset{(\text{外三角})}{360^\circ} - \underset{(\text{内三角})}{360^\circ} = 0^\circ$$

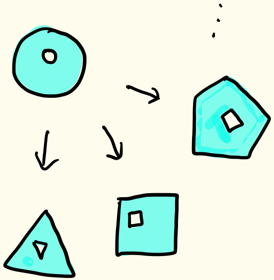


Q. 9個の穴あき多角形の
とんがり度?

まとめ.



とんがり度 360°



とんがり度 0°

. . .

平面上の連続変形に対して

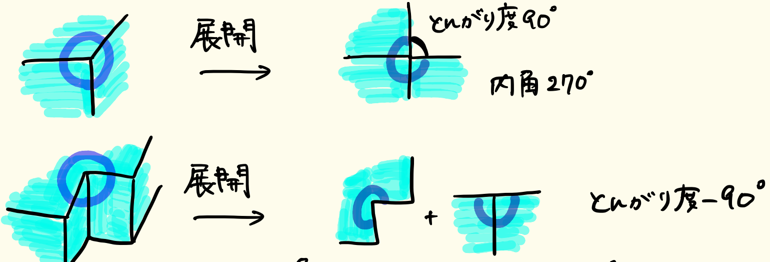
とんがり度は不変!!

(微分幾何的量からトポロジー的量をとり出す。)

まがり具合に依る量　　つながり方だけ見る量.

3. 多面体

1つの頂点(角)のとんがり度 = 360° − 内角の総和.



内角 270° + 180° = 450°

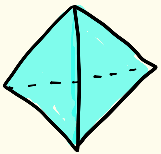
多面体のとんがり度

:= すべての角のとんがり度の総和.

= (360°×頂点の数)

− (すべての角の内角の総和)

四面体のとんがり度



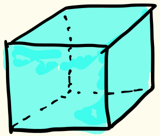
頂点の数　　三角形の数

とんがり度 = (360°×4) − (180°×4)

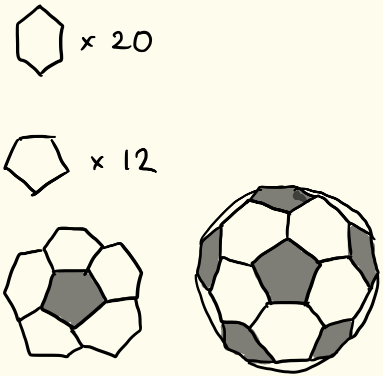
三角形の内角の和

= 720°

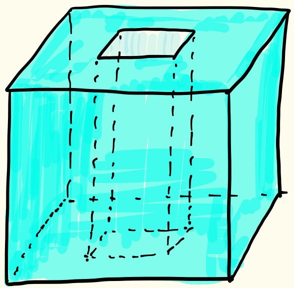
Q. 立方体のとんがり度?



Q. サッカーボール のとんがり度？



Q、穴あき立方体 の とんがり度？



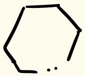
Q. 9個の穴あき立方体 の とんがり度？

まとめ.

空間の連続変形に対して
とんがり度は不変!!

4. とんがり度とオイラー標数

一般に,

 … 

n_1角形 … n_F角形

が集まって頂点がV個の多面体Tを作るとする。

辺の数 $= \frac{1}{2}(n_1+\cdots+n_F) = E$ とおく。

Tのとんがり度

$$= (V\times 360^\circ) - \left((n_1-2)\times 180^\circ + (n_2-2)\times 180^\circ + \cdots + (n_F-2)\times 180^\circ\right)$$

$$= V\times 360^\circ - (n_1+\cdots+n_F)\times 180^\circ + F\times 2\times 180^\circ$$

$$= V\times 360^\circ - \frac{1}{2}(n_1+\cdots+n_F)\times 360^\circ + F\times 360^\circ$$

$$= (\underbrace{V-E+F}_{})\times 360^\circ$$

Tのオイラー標数：トポロジーの不変量.

ポイント
局所的な量のたし合わせ
→ 大域的な量.

5. 発展：オイラー標数とKhovanovホモロジー.

オイラー標数の別の定義

X：位相空間

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i$$

b_i：Xのi次ベッチ数.

概観. X：曲面

$\partial_{i+1} \circ \partial_i = 0$

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

：鎖（チェイン）

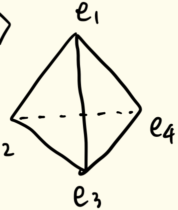
C_2 = 面の生成する自由アーベル群

C_1 = 辺の〃

C_0 = 頂点の〃

$\chi(X)$は閉曲面を完全に分類する!

〈例〉

$X =$ 

$$C_0 = \{a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$$

$$C_1 = \{a_{12} \overrightarrow{e_1 e_2} + a_{23} \overrightarrow{e_2 e_3} + \cdots\}$$

$$C_2 = \{a_{123} \overrightarrow{e_1 e_2 e_3} + \cdots\}$$

① 複雑な構造

構成する ↑　↓ 落とす

② 簡単な値

多 ↕ 情報 少

ホモロジー

$$H_i(X) = \mathrm{Ker}\,\partial_i / \mathrm{Im}\,\partial_{i+1}$$

b_i：$H_i(X)$のランク

圏化 (e.g. Khovanov-homology)

ものの背後にある構造を見つける