1　解答

演習 1. $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$

演習 2. $x \in \emptyset$ はいつでも偽より $\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in B)$ が成りたつ.

ポイント！「ならば（$\Rightarrow$)」の命題では，前提が偽のとき，全体は真になる.

演習 3. $P \wedge (\neg Q)$

演習 4. Y の任意の元 y に対して X の元 x が存在し $f(x) = y$ が成り立つ.

演習 5. $\forall y \in Y,\ \exists! x \in X,\ s.t.\ f(x) = y.$

解答

演習 6. 有理数の切断の定義を述べ，それを用いて無理数と実数を定義せよ．

略解. 資料参照．

演習 7. 定理 *1* を仮定して定理 *2* を示せ．

略解. S が下に有界であると仮定して，S に下限があることを示す．

S の下界すべてを集めた集合を A とし，その他の実数を集めた集合を B とすれば，実数の一つの切断 (A, B) が定まる．実際、B の任意の元は下界ではないから，任意の下界より大きい．定理 *1* より，この切断によって一つの実数 s が定まり，それは A の最大数か B の最小数かのどちらかである．この s が S の下限であることを示す．すなわち，s が A の最大数であることを示す．s が B の最小数であると仮定する．すると s は S の下界ではないので，s より真に小さい $x \in S$ が存在する．ここで $x < b < s$ となる数 b をとると，b は S の元 x より大きいから下界ではない．すなわち $b \in B$. これは s が B の最小数であることに矛盾する．

S が上に有界のときに上限が存在することも同様に示される．

解答

演習 8. 定理 *2* を仮定して定理 *3* を示せ．

Proof. 数列 a_n が上に有界な単調増加数列とする．このとき，すべての n に対して $a_n < M$ なる定数 M がある．すなわち，集合 $\{a_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ は上に有界である．定理 2 よりその上限を α とおくと，数列 a_n は α に収束する．なぜなら，$\alpha' < \alpha$ とすると上限の定義により $\alpha' < a_m \leq \alpha$ なる a_m があるが，数列は単調増加なので $n > m$ のとき $\alpha' < a_n \leq \alpha$，すなわち $|\alpha - a_n| < \alpha - \alpha'$. α' は α より小さい任意の数より $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. □

演習 9. 定理 *3* を仮定して定理 *4* を示せ．

Proof. 区間 I_n は区間 I_{n-1} に含まれるため，

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots\cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

すなわち数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は単調かつ有界である．よって定理 3 より極限

$$\lim a_n = \alpha, \quad \lim b_n = \beta$$

が存在する．

ここで，任意の m, n に対して $a_n < b_m$ から $\alpha \leq \beta$ が成り立つ. このとき条件 $\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$ より任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$b_p - a_p < \epsilon$$

なる p が存在する．すると

$$a_p \leq \alpha \leq \beta \leq b_p$$

より

$$0 \leq \beta - \alpha < \epsilon.$$

ϵ は任意なので $\alpha = \beta$ が成り立つ. □

演習 10. 定理 *4* を仮定して定理 *1* を示せ．

Proof. (A, B) を実数の切断とする．定理 4 を仮定して，下組 A に最大限があり上組 B に最小数がないか，下組 A に最大限がなく上組 B に最小数があることを証明する．$a_0 \in A$, $b_0 \in B$ を任意にとり，$I_0 = [a_0, b_0]$ とする．このとき $\frac{a+b}{2} \in A$ であれば $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$ とおき，$\frac{a+b}{2} \in B$ であれば $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$ とおいて $I_1 = [a_1, b_1]$ とする．同様にして区間 $[a_1, b_1]$ の左半分もしくは右半分を $I_2 = [a_2, b_2]$ とする．このような操作を継続すると，区間の列

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots,$$
$$I_n = [a_n, b_n], \quad b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$$

ができる．これは定理 4 の仮定を満たすため，この区間列によって各区間に共通の数 s が定まる．

今 $s \in A$ とする．すると $s < s'$ なる s' を取れば，$b_n \to s$ によって $s < b_n < s'$ なる n が存在するから，s' は B に属する．すなわち，s は A に属し，s より真に大きな数はすべて B に属する．従って s は A の最大値である．さらに，このとき B に最小数はない．仮に s' を B の最小数とすると，$s < s'$ であり，上記のように $b_n < s'$ なる n が存在し，矛盾である．

同様に，もし $s \in B$ であれば A に最大限がなく B に最小数があることが示される． □

演習 11. (1) 有理数に対するアルキメデスの定理を示せ．

(2) 実数の中で有理数が稠密であることを用いて実数に対するアルキメデスの定理を示せ．

Proof. (1) 正の有理数 a, b に対して，$c = a/b$ は有理数で $bc = a$ だから，c の分母を払った正整数 n に対して $bn \geq a$ で，n より大きい整数 N をとれば，$bN > a$.

(2) 正の実数 x, y に対して，有理数の稠密性より，$a \geq x, y \geq b$ となる正の有理数 a, b をとり，有理数に関するアルキメデスの原理を使って，正整数 N で $bN > a$ なるものをとると，$yN \geq bN > a \geq x$ となる.

□

演習 12. α を実数とするとき α に収束する有理数の数列 a_n が存在することを示せ.

Proof. 実数の中で有理数は稠密より，$a_n \in [\alpha - \frac{1}{2^n}, \alpha]$ なる有理数列 a_n がとれて，これは α に収束する. □

解答

演習 13. 無限級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

は (a) 条件収束するが (b) 絶対収束はしないことを示せ．

略解． (a) まずは絶対収束しないこと，すなわち

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

が収束しないことを示す．部分和を $s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$ とおく．$n=2^{m+1}=1+2^0+2^1+\cdots+2^m$ $(m\geq 0)$ のとき，

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2\text{ 項}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2^m+1}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}}_{2^m\text{ 項}}.$$

ここで

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2},$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{2^m+1}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}\geq\frac{1}{2^{m+1}}\times 2^m=\frac{1}{2}$$

より $s_n\geq 1+\frac{m+1}{2}$ がわかる．従って $s_n\to\infty$ $(n\to\infty)$．

(b) 条件収束することを示す．一般に，$a_1>a_2>\cdots>0$ で $n\to\infty$ のとき $a_n\to 0$ $(\forall\epsilon,\exists N,\ s.t.\ \forall n>N, a_n<\epsilon)$ ならば級数

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$$

は収束することを示す．部分和を $s_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n$ とおくと，

$$s_2<s_4<s_6\cdots s_5<s_3<s_1.$$

$\{s_1,s_3,s_5,\cdots\}$ は単調減少で下に有界だから極限 α に収束する．同様に $\{s_2,s_4,s_6,\cdots\}$ は単調増加で上に有界だから極限 β に収束する．また仮定 $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$ により $s_{2n+1}-s_{2n}=a_{2n+1}\to 0$ $(n\to\infty)$．従って $\alpha=\beta=\lim_{n\to\infty}s_n$．

演習 14 (ディリクレの定理)**.** (a) 絶対収束する級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は足し算の順に無関係であることを示せ．

(b) 条件収束する級数 $\sum a_n$ は項の順序を変更すると任意の実数 C に収束させることができる．また，$\pm\infty$ に発散させることもできる．これを示せ．

略解． (a) 数列 (a_n) の正項を $p_1,p_2,\ldots$ とおき，負項を $-q_1,-q_2,\ldots$ とおく．$p=\sum p_n$，$q=\sum q_n$ とすると，$\sum|a_n|=p+q$ が有限であるから p も q も有限である．$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ において足し算の順序を変えても p と q は変わらないから，$s=p-q$ とおけば $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は足し算の順に無関係に s に収束する．

(b) 数列 (a_n) の正項を $p_1,p_2,\ldots$ とおき，負項を $-q_1,-q_2,\ldots$ とおく．$p=\sum p_n$，$q=\sum q_n$ とすると，$\sum a_n$ は絶対収束しないから $\sum|a_n|=p+q=\infty$ であり，かつ条件収束するから p と q はどちらも ∞ である．(片方だけ ∞ であると $\sum a_n$ は発散する．) 次の手順で $\sum a_n$ の順序を変更する．

(i) まず正項 $p_1,p_2,\ldots$ を順に加えて，p_{N_1} で和が初めて C より大きくなるまで続ける．

(ii) 次に $-q_1,-q_2$ を順に加えて q_{M_1} で和が初めて C より小さくなるまで続ける．

(iii) $\sum p_n$ も $\sum q_n$ も ∞ だからこのような操作を無限に行うことができる．このような級数

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{N_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{M_1} + p_{N_1+1} + \cdots + p_{N_1+N_2} - q_{M_1+1} - \cdots \tag{1}$$

とおく．

ここで，$N_1, N_2, \ldots, M_1, M_2, \ldots$ は少なくとも 1 以上だから，(a_n) のすべての項がいつかは 1 度用いられて，*(1)* は級数 $\sum a_n$ の順序の変更である．*(1)* が C に収束することは状況をよく考察すると明らかである．(数直線を書いて考える.) 実際，i 回目に正項群を足すステップを考えると最後に p_{N_i} を足して C より大きくなるため，p_{N_i} までの和と C との差は p_{N_i} 以下である．同様に i 回目に負項群を足すステップを考えると最後に $-q_{N_i}$ を足して C より小さくなるため，$-q_{N_i}$ までの和と C との差は q_{N_i} 以下である．$\sum a_n$ は収束するから N が限りなく大きくなると p_N, q_N は限りなく小さくなる．従って (1) は C に収束する．

例題 1. 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を収束する無限級数とする．このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

略解. 無限級数が α に収束する $\Leftrightarrow$ 部分和 s_n が α に収束する．ここで $\lim_{n\to\infty} s_n = \alpha$ なら，一つずらして $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \alpha$ だから

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to \alpha - \alpha = 0 \quad (n \to \infty)$$

となる．

例題 2. $|a| > 1$ ならば次の級数

$$\frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \cdots + \frac{2^n}{1+a^{2^n}} + \cdots$$

は $\dfrac{1}{a-1}$ に収束することを示せ．

略解. 部分和を $s_n = \frac{1}{1+a} + \cdots + \frac{2^n}{1+a^{2^n}}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ とおく．示すべき収束先と部分和の差，$s_n - \frac{1}{a-1}$ を計算すると，帰納的に $s_n - \frac{1}{a-1} = \frac{2^{n+1}}{1-a^{2^{n+1}}}$ となることがわかる．($\frac{2^n}{1+a^{2^n}} + \frac{2^n}{1-a^{2^n}} = \frac{2^{n+1}}{1-a^{2^{n+1}}}$ に注意.) ここで $n \to \infty$ とすると $2^{n+1} = m \to \infty$ だから $|a| > 1$ より $m/a^m \to 0$ $(m \to \infty)$ (多項式 $\ll$ 指数関数)．よって $\frac{m}{1-a^m} = \frac{(m/a^m)}{(1/a^m)-1} \to 0$ より $s_n \to \frac{1}{a-1}$ がわかる．

例題 3. 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k}$ は収束することを示せ．

略解. 部分和を $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^k}$ と置くと，明らかに s_n は単調増加．また

$$s_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

より s_n は上に有界．有界単調列は収束するので主張は示された．

解答

演習 15. 任意の有理数において不連続，任意の無理数において連続なる関数を構成せよ．

略解.(例 1) 無理数ならば $f(x)=0$, $x=\frac{p}{q}$ が有理数（既約分数で $q>0$）ならば $f(x)=\frac{1}{q}$ として $x>0$ で定義される関数.

(例 2) $x=\frac{p}{10^n}$ で p は 10 で割れない整数のとき $f(x)=\frac{1}{10^n}$，その他の x では $f(x)=0$ として定義される関数.

演習 16. $f(x)$ がある区間 $[a,b]$ の有理数に関してのみ定義されていて，かつ連続の条件，すなわち任意の有理数 $c\in[a,b]$ に対して

$$\forall\epsilon,\exists\delta,\ s.t.\ |x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(c)|<\epsilon$$

となるとき，$f(x)$ を拡張して区間 $[a,b]$ 全体で連続な関数が得られるだろうか？

略解. $f(x)$ が有理数上で一様連続であれば区間 $[a,b]$ 全体で $f(x)$ を連続な関数に拡張できる（実は必要十分である）．コーシーの収束判定法（数列が収束 $\Leftrightarrow$ 数列はコーシー列）を用いて示す.

任意の無理数 a に対して a に収束する有理数列 (a_n) をとる．$[a,b]$ 全体で $f(x)$ を連続に拡張するためには，連続性の定義より $f(a)=f(\lim_{n\to\infty}a_n)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)$ と定める他ない．このとき $\lim_{n\to\infty}f(a_n)$ が収束し，極限が数列 $a_n\to a$ の取り方によらないことを示す.

任意の $\epsilon>0$ をとる．このとき $f(x)$ が有理数上で一様連続であるから，

$$\exists\delta>0,\ s.t.\ \forall x,c\in\mathbb{Q},\ |x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(c)|<\epsilon. \tag{1}$$

数列 (a_n) はコーシー列だから，上記の δ に対して

$$\exists N>0,\ s.t.\ m,n>N\Rightarrow|a_m-a_n|<\delta.$$

従って *(1)* より $|f(a_m)-f(a_n)|<\epsilon$ が従う．すなわち数列 $f(a_n)$ もコーシー列だから収束する.

a に収束する別の有理数列 (b_n) をとる．このとき任意の $\epsilon>0$ と *(1)* の $\delta>0$ に対して

$$\forall\delta,\exists N_a>0,\ s.t.\ m>N_a\Rightarrow|a_m-a|<\delta/2,$$
$$\forall\delta,\exists N_b>0,\ s.t.\ n>N_b\Rightarrow|a-b_n|<\delta/2$$

$N=\max(N_a,N_b)$ とすると

$$m,n>N\Rightarrow|a_m-b_n|\le|a_m-a|+|a-b_n|<\delta.$$

従って再び *(1)* より $|f(a_m)-f(b_n)|<\epsilon$. すなわち $f(a_m)$ と $f(b_n)$ は同じ値に収束する.

演習 17. 次で定義される函数 f は a をどうとっても $x=0$ で不連続であることを示せ.

$$f(x)=\begin{cases}a & (x=0)\\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x\neq 0)\end{cases}$$

略解. 0 に収束する点列をいろいろにとって函数値の方で別々の値に収束させることができる.

例題 4. 区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ のとる値がすべて有理数ならば、$f(x)$ は定数関数であることを示せ。

略解. 中間値の定理.

例題 5. 奇数次の実数係数多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ ($a_n\neq 0$, n は奇数) が定める方程式 $f(x)=0$ は少なくとも 1 つ実数解をもつことを示せ.

解答

演習 18. 関数の連続性は微分可能性の十分条件ではない．実際，$f(x) = x\sin\frac{1}{x}, f(0) = 0$ に対して

(1) $f(x)$ の概形を描け．

(2) $f(x)$ が $x = 0$ でも連続であることを示せ．($f(x) = \sin x$ の場合と比較してみよう．)

(3) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能でないことを示せ．

略解． (1) 省略．

(2) $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$ より，$\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$．したがって任意の $\epsilon > 0$ に関して $\delta < \epsilon$ をとれば，$|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < |x| < \delta < \epsilon$．

(3) $x = 0$ での微分を考えると

$$\frac{f(\delta) - f(0)}{\delta} = \frac{1}{\delta}\left(\delta\sin\frac{1}{\delta}\right) = \sin\frac{1}{h}.$$

従って $\delta \to 0$ のとき極限は存在しない．

演習 19. (1) カントールの悪魔の階段の概形を描け．

(2) カントールの悪魔の階段は連続であることを示せ．

(3) カントールの悪魔の階段はカントール集合を除いて微分が 0 になることを示せ．

すなわち，カントールの悪魔の階段は連続で，“ほとんどいたるところで（測度 0 の集合を除いていたるところで）”微分が 0 なのに定数関数ではない！という変な関数である．

略解． (1) 省略．

(2) 任意の $\epsilon > \frac{1}{2^n} > 0$ に関して $\delta < \frac{1}{3^n}$ をとれば，

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |x - c| < \frac{1}{3^n} \Rightarrow |f(x) - f(c)| \le \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

(3) 構成より，カントール集合以外の各区間では定数関数より微分は 0 である．

練習 8. 区間 $[a, b]$ において微分可能な関数 $f(x)$ が点 $c \in (a, b)$ で（弱い意味で）極大値をとるとする．すなわち

$$\exists\delta > 0,\ s.t.\ |x - c| < \delta \Rightarrow f(c) \ge f(x)$$

とすると，$f'(c) = 0$ となることを示せ．

略解． 関数の極限の定義（定義 *11*）より，$f(x)$ が微分可能ということは任意の数列 $a_n \to a,\ (n \to \infty)$ に対して $\frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n}$ の極限が存在し，それら一致するということである．

数列を点 c に下から近づけると，c は極大であるから

$$\lim_{h_n \to 0} \frac{f(c - h_n) - f(c)}{h_n} \ge 0.$$

数列を点 c に上から近づけると，c は極大であるから

$$\lim_{h_n \to 0} \frac{f(c + h_n) - f(c)}{h_n} \le 0.$$

両方の極限は一致するから $f'(c) = 0$ とならなければならない．

練習 9. 次の曲線の接線を求めよ．

解答

演習 20 (ロルの定理の拡張)．$[a,\infty)$ において $f(x)$ が微分可能で $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$ ならば $c > a$, $f'(c) = 0$ なる c が存在することを示せ．

略解．$f(x)$ が定数関数であれば主張は明らか．$f(x)$ が定数関数でないとすると，ある実数 $\epsilon \neq 0$ と $\xi_m > a$ が存在して $f(\xi_m) = f(a) + \epsilon$．ここでは $\epsilon > 0$ と仮定する（$\epsilon < 0$ の場合も同様に示すことができる）．$f(x)$ は連続だから中間値の定理より $0 < \epsilon' < \epsilon$ となる ϵ に対して $a < \xi_l < \xi_m$ となる ξ_l が存在し $f(\xi_l) = f(a) + \epsilon'$.

一方，$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$ から上記の ϵ' に対してある実数 M が存在し $x > M$ に対して $f(x) < f(a) + \epsilon'$．従って再度中間値の定理より $\xi_m < \xi_r < M$ となる ξ_r が存在し $f(\xi_r) = f(a) + \epsilon'$．すなわち $f(\xi_l) = f(\xi_r) = f(a) + \epsilon'$ であるからロルの定理より $\xi_l < c < \xi_r$ となる c が存在し $f(c)' = 0$.

演習 21. (1) $a > 0$, $\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{(a+x^2)^a} = \frac{P_n(x)}{(a+x^2)^{a+n}}$ とすれば，$P_n(x)$ は n 次の多項式で，それは n 個の相異なる実根をもち，それらの根は $P_{n-1}(x)$ の根によって隔離されることを示せ．

(2) $\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$ に対しても同様.（$H_n(x)$: *Hermite* の多項式）

(3) $e^x \frac{d^n}{dx^n} x^n e^{-x} = L_n(x)$ に対しても同様.（$L_n(x)$: *Laguerre* の多項式）

略解． (1) $P_n(x)$ が n 次の多項式であることを帰納法で示す．$n = 0$ のとき $P_0(x) = 1$ より正しい．$n-1$ まで主張が正しいとすると，

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= (a+x^2)^{a+n}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{(a+x^2)^a}\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left((a+x^2)^{a+n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{(a+x^2)^a}\right)\right) - 2x(a+n)(a+x^2)^{a+n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{(a+x^2)^a}\right)\\
&= \frac{d}{dx}\big((a+x^2)P_{n-1}(x)\big) - 2x(a+n)P_{n-1}(x)\\
&= 2xP_{n-1}(x) + (a+x^2)P_{n-1}(x) - 2x(a+n)P_{n-1}(x).
\end{aligned}
$$

これより $P_{n-1}(x)$ が $n-1$ 次の多項式ならば $P_n(x)$ は n 次の多項式である.

次に $P_n(x)$ は相異なる実根をもち，それらの根は $P_{n-1}(x)$ の根によって隔離されることを帰納法で示す. $f(x) = \frac{1}{(a+x^2)^a}$ とすると，$P_n(x) = (a+x^2)^{a+n} f^{(n)}(x)$ より，$P_n(x)$ の実根は $f^{(n)}(x)$ のそれと一致する. $n = 0$ のとき $P_0(x) = 1$ より実根なし．$n = 1$ のとき，$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ よりロルの定理の拡張により $\xi \in (-\infty,\infty)$ が存在して $f'(\xi) = 0$. 従って ξ は $P_1(x) = 0$ の解.

$P_{n-1}(x) = 0$，すなわち $f^{(n-1)} = 0$ の相異なる解を $\xi_1^{n-1}, \dots \xi_{n-1}^{n-1}$ とする. ロルの定理により $\xi_{i+1}^n \in (\xi_i^{n-1}, \xi_{i+1}^{n-1})$ $(i = 1, \dots n-2)$ が存在し，$f^{(n)}(\xi_{i+1}^n) = 0$. さらに $\lim_{x\to\infty} f^{(n-1)}(x) = \lim_{x\to-\infty} f^{(n-1)}(x) = 0$ よりロルの定理の拡張により $\xi_1^n \in (-\infty, \xi_1^{n-1})$, $\xi_n^n \in (\xi_{n-1}^{n-1}, \infty)$ が存在して $f^{(n)}(\xi_1^n) = f^{(n)}(\xi_n^n) = 0$. 従って主張は示された.

(2) 略

(3) 略

練習 11. 次を示せ.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\cos x}{x} = 2$

(2) $\lim_{x\to +0} x^x = 1$

略解． (1) $f(x) = e^{2x} - \cos x$, $g(x) = x$ としてロピタルの定理を用いると

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-\sin x}{1} = 2.$$

解答

演習 22 (合成関数の高階微分)**.** 関数 $F(u)$ において $u=\phi(x)$ とすれば

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}F(u)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i}\frac{1}{i_1!i_2!\cdots i_n!}F^{(k)}(u)\left(\frac{\phi'}{1!}\right)^{i_1}\left(\frac{\phi''}{2!}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{\phi^{(n)}}{n!}\right)^{i_n}$$

となることを示せ．ただし i の和は $i_1\geq 0, i_2\geq 0,\ldots,i_n\geq 0$, $i_1+i_2+\cdots+i_n=k$, $i_1+2i_2+\cdots ni_n=n$ なる整数の組 $i=(i_1,\ldots i_n)$ すべてをはしる．また $0!=1$ と定めた．

略解. $F(u)$ をテイラーの公式で展開して，$u-u_0=\phi(x)-\phi(x_0)$ に ϕ のテイラー展開を代入し，$(x-x_0)^n$ の項を集める．すなわち

$$\begin{aligned}
F(u)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{F^{(k)}(u_0)}{k!}(u-u_0)^k+\frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(u-u_0)^{n+1}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{F^{(k)}(u_0)}{k!}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{\phi^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j+\frac{\phi^{(n+1)}(\nu)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}-\phi(x_0)\right)^k\\
&+\frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{\phi^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j+\frac{\phi^{(n+1)}(\nu)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}-\phi(x_0)\right)^{n+1}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{F^{(k)}(u_0)}{k!}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\phi^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j+\frac{\phi^{(n+1)}(\nu)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right)^k\\
&+\frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\phi^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j+\frac{\phi^{(n+1)}(\nu)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

両辺を x で n 回微分して $x=x_0(u=u_0)$ とすると主張が得られる．

演習 23. (1) 区間 $[a,b]$ において $f(x)$ とその導関数が微分可能，かつ $f''(x)>0$, $f(a)>0$, $f(b)<0$ ならば

$$a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)},\quad a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)},\cdots$$

とするとき，数列 $a_1<a_2<a_3<\cdots$ は $[a,b]$ における $f(x)=0$ のただ一つの根に収束する（ニュートンの近似法）．これを示せ．

(2) $\cos x=x$ の解を (1) の方法で近似せよ（三角関数の真数表を用いる）．

略解. (1) $f'(x)$ が単調に増加するから，$f(x)$ の根は $[a,b]$ 内にただ一つ存在する．$f(x)$ は凸関数であるから a_i は単調に増加して $f(x)=0$ の根より小さい．したがって $\lim_{n\to\infty}a_n=\lambda$ が存在する．したがって

$$a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}\quad\to\quad\lambda=\lambda-\frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}.$$

ここで $f'(a_1)<f'(a_2)<\cdots<f'(\lambda)<0$ より $f(\lambda)=0$.

(2)

$$f(x)=x-\cos x,\quad f'(x)=\sin x+1,\quad f''(x)=\cos x.$$

この場合解はただひとつで区間 $[0,\frac{\pi}{2}]$ にある．$f(0)<0, f(\frac{\pi}{2})>0$ より, 右から根に近づけていく．真数表を見ると求める角は $a=0.73$ と $b=0.74$ の間にある．このとき

$$\cos a=0.74517,\quad\cos b=0.73847.$$
$$f(a)=-0.01517,\quad f(b)=0.00513.$$

第一回目の近似は

$$b_1 = b - \frac{0.00513}{1.67429} \fallingdotseq 0.735407$$

となる．誤差を評価するためには，テイラーの公式

$$0 = f(c) = f(b) + f'(b_n)(c - b_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(c - b_n)^2$$

を両辺 $f'(b_n)$ で割って

$$0 = \frac{f(b)}{f'(b_n)} + c - b_n + \frac{f''(\xi)}{2f'(b_n)}(c - b_n)^2$$

$$|c - b_{n+1}| = |c - b_n + \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}| = \left|\frac{f''(\xi)}{2f'(b_n)}(c - b_n)^2\right| < \left|\frac{f''(\xi)}{2f'(b_n)}(b - b_n)^2\right|$$

を使う $(b_n < \xi < c)$.

解答

演習 **24.** 関数

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\text{ は無理数})\\ 1/q & (x=p/q\text{ が既約分数}, q>0)\end{cases}$$

は任意の有界閉区間 I 上で可積分で $\int_I f(x)dx=0$ となることを示せ．

略解. $I=[0,1]$ に含まれる既約分数 p/q で，$q\leq n$ となるものの総数 $N(n)\leq n(n-1)/2$ である．したがって，I を p 等分する分割 Δ において分割の幅は p^{-1} で $s_\Delta=0$ だから，$0\leq S_\Delta-s_\Delta=S_\Delta\leq p^{-1}\left(n(n-1)/2+p\cdot\frac{1}{n}\right)$. 特に $p=n^3$ とすると $p^{-1}\left(n(n-1)/2+p\cdot\frac{1}{n}\right)=n^{-3}\left(n(n-1)/2+n^3\cdot\frac{1}{n}\right)<\frac{3}{2n}\to 0\ (n\to\infty)$. したがって $S=s=0$ となり $f(x)$ は可積分で $\int_I f(x)dx=0$.

練習 **13.** 次の関数の原始関数を求めよ．

(1) $x^a\log x$, $(a\neq -1)$

(2) x^ne^x, $n\in\mathbb{N}$

(3) $(\log x)^n$, $(n\in\mathbb{N})$

(4) $\arcsin x$

(5) $\cos^2(x)$

(6) $\frac{(\log x)^2}{x}$

(7) $\frac{x^2+2}{(x+1)^3}$

(8) $\sin^3 x\cos^2 x$

略解. (1) $(a+1)^{-1}x^{a+1}\left(\log x-(a+1)^{-1}\right)$

(2) $e^x(x^n-nx^{n-1}+\cdots+(-1)^nn!)$

(3) $x\left((\log x)^n-n(\log x)^{n-1}+\cdots+(-1)^nn!\right)$

(4) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$

(5) $\frac{\sin 2x+2x}{4}$

(6) $\frac{(\log x)^3}{3}$

(7) $\log|x+1|+\frac{2}{(x+1)}-\frac{3}{2(x+1)^2}$

(8) $\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}$

練習 **14.** 次の不等式が成り立つことを示せ．

(1) $\log(1+\sqrt{2})<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}<\frac{\pi}{2}$, $(n>2)$

(2) $\frac{\pi}{2}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}<\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(3) $\frac{1}{R}(1-e^{-\frac{\pi}{2}R})<\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin x}dx<\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R})$, $(R>0)$

略解. 以下の不等式から得られる．

(1) $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}<(1+x^n)^{-\frac{1}{2}}<(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $(0<x<1)$

(2) $0<\sin x<1, (0<x<\frac{\pi}{2})$

(3) $\frac{2x}{\pi}<\sin x<x, (0<x<\frac{\pi}{2})$

解答

演習 25. (1) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ $(n \in \mathbb{N})$ を求めよ．

(2) $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ を求めよ．

略解． (1) $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. $\sin^n \theta = (-\cos\theta)' \sin^{n-1}\theta$ だから，$n \geq 2$ のときは部分積分により

$$
\begin{aligned}
I_n &= \left[-\cos\theta \sin^{n-1}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin^{n-2}\theta d\theta \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\sin^{n-2}\theta d\theta \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n).
\end{aligned}
$$

従って漸化式

$$
I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}
$$

が得られ，

$$
I_n = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}, & (n = 2m) \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} & (n = 2m+1) \end{cases}
$$

を得る．ただし $(2m)!! = 2m \cdot (2m-2) \cdots 2$, $(2m+1)!! = (2m+1)\cdot(2m-1)\cdots 1$.

(2) $x = \sin\theta$ とおけば問 (1) に帰着されて $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = I_n$.

演習 26. 以下の二つの積分計算には間違いが含まれている．間違いとその原因を指摘せよ．

(1)

$$
\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2.
$$

(2)

$$
\frac{d}{dx}\arctan\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2}.
$$

これより

$$
\int_{-1}^{1} \frac{2}{4x^2+(x-1)^2} dx = \left[\arctan\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]_{-1}^{1} = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.
$$

略解． (1) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ の原始関数は $x \neq 0$ において $F(x) = -\frac{1}{x}$ であるが，$x = 0$ において $f(x)$ は定義されず，0 を含む区間では積分可能ではない．

(2) $x = 0$ において，$\arctan\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)$ を上記のように主値にとると不連続になる．連続になるように arctan の値をとれば良い．例えば $x = 0$ で $\frac{\pi}{2}$ となるようにとるならば $x = 1$ のとき π, $x = -1$ のとき $\frac{\pi}{4}$ となり

$$
\left[\arctan\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]_{-1}^{1} = \pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}
$$

が正しい解答である．

解答

演習 27 (log$(1+x)$ の展開)**.**

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n,\\ R_n &= \int_0^x \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(n-1)!(1+t)^n}(x-t)^{n-1}dt\\ &= \int_0^x \frac{(-1)^{n-1}(x-t)^{n-1}}{(1+t)^n}dt\end{aligned}$$

(1) $|x| < 1$ のとき $R_n \to 0$, $(n \to \infty)$ を示せ．すなわち $|x| < 1$ の範囲で

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots .$$

(2) $x = 1$ のときも $R_n \to 0$, $(n \to \infty)$ となることを示せ．すなわち

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

略解.

(1) $|x| < 1$ とする．$|x| < r$ となる $0 < r < 1$ を一つ固定する．$x \geq 0$ の場合，剰余項の積分の t は $0 \leq t \leq x$ の範囲で動くから

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leq \frac{r}{1} = r.$$

$x \leq 0$ の場合は $x \leq t \leq 0$ だから

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| = \frac{|x|-|t|}{1-|t|} \leq \frac{r-|t|}{1-|t|} = r - \frac{(1-r)|t|}{1-|t|} < r.$$

一方，$|t| \leq |x| \leq r$ より

$$|1+t| \geq 1 - |t| \geq 1 - r.$$

従って

$$\begin{aligned}|R_n| &= \left|\int_0^x \frac{(-1)^{n-1}(x-t)^{n-1}}{(1+t)^n}dt\right|\\ &\leq \left|\int_0^x \left|\frac{(x-t)}{(1+t)}\right|^{n-1} \frac{1}{|1+t|}dt\right|\\ &\leq \left|\int_0^x \frac{r^{n-1}}{1-r}dt\right|\\ &\leq \frac{r^n}{1-r} \to 0, (n \to \infty).\end{aligned}$$

$r(0 < r < 1)$ は任意だったから，すべての $x(|x| < 1)$ で $R_n \to 0$, $(n \to \infty)$ が示された．

(2) $x = 1$ のとき

$$|R_n| = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(1+t)^n}dt$$

ここで $u = \frac{1-t}{1+t}$ と置換すると $\frac{du}{dt} = -\frac{2}{(1+t)^2}$ より

$$\frac{(1-t)^{n-1}}{(1+t)^n} \leq \frac{(1-t)^{n-2}}{(1+t)^n} = \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{n-2} \frac{1}{(1+t)^2} = -\frac{1}{2}u^{n-2}\frac{du}{dt}.$$

したがって

$$|R_n| \leq \frac{1}{2}\int_1^0 u^{n-2}du = \left[-\frac{1}{2(n-1)}u^{n-1}\right]_1^0 = \frac{1}{2(n-1)} \to 0, (n \to \infty).$$

演習 28. 時間 t のときに点 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ を通るような曲線を考える．時間 $t = a$ から $t = b$ の間の曲線の長さが $\int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|dt$ となることを資料をなぞって説明せよ．

略解．資料参照．

解答

演習 29 (コーシーの条件)**.** 区間 $[a,b)$ で定義された関数 $f(x)$ が任意の $u\in[a,b)$ に対する部分閉区間 $[a,u]$ において積分可能であるとき，$f(x)$ が区間 $[a,b)$ で広義積分可能であることの必要十分条件は，

$$\forall\epsilon,\exists c\in[a,b),\ s.t.\ \left(c<v<u<b\Rightarrow\left|\int_v^u f(x)dx\right|<\epsilon\right)$$

となることである．これを示せ．

略解**.** $[a,b)$ で定義される $f(x)$ の積分関数を

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

と置く．$f(x)$ が区間 $[a,b)$ で広義積分可能であるとは極限 $\lim_{x\to b}F(x)=\int_a^b f(t)dt$ が存在することである．すなわち，$[a,b)$ の任意の数列 $a_n\to b,\ (n\to\infty)$ に対して $F(a_n)\to\int_a^b f(t)dt,\ (n\to\infty)$ となる．したがって数列 $F(a_n)$ はコーシー列であり，

$$\forall\epsilon,\exists N>0,\ s.t.\ (N<m<n\Rightarrow|F(a_m)-F(a_n)|<\epsilon)$$

となる．数列 $a_n\to a$ は任意より主張が示される．

解答

演習 30. (1) 定理 *32, 33* を参考に $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta (n \in \mathbb{N})$ をガンマ関数を用いて表し，その値を求めよ．

(2) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ をガンマ関数を用いて表し，その値を求めよ．

略解． (1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta = \frac{1}{2} B(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}) \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

$\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1)$ と $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を用いて

$$I_n = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}, & (n = 2m) \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} & (n = 2m+1) \end{cases}$$

が従う．

(2)

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

練習 15. 次の積分をガンマ関数を用いて表せ．

(1) $\int_0^\infty e^{-x^3} dx$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a \theta d\theta \quad (a > -1)$

(4) $\int_0^\infty e^{-x^n} dx, (n \in \mathbb{N})$

略解． (1) $x^3 = t,\ x = t^{\frac{1}{3}}$ と変数変換すると $dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$ より

$$\int_0^\infty e^{-x^3} dx = \frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3}).$$

(2) *(1)* と同じ変数変換で

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ = \frac{1}{3}B(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{6})} \\ = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{3})}{3\Gamma(\frac{5}{6})}.$$

(3) この積分は，ベータ関数の公式 $B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta\, d\theta$ で $p = \frac{a+1}{2},\ q = \frac{1}{2}$ とおいたもの $\times\frac{1}{2}$ だから，その値は

$$\frac{1}{2}B(\frac{a+1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{a+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{a+2}{2})} \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\frac{a+1}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2}+1)}.$$

(4) $x^n = t$ つまり $x = t^{\frac{1}{n}}$ で変数変換して $\left(\frac{dx}{dt} = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\right)$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x^n}\,dx &= \int_0^\infty e^{-t}\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,dt \\ &= \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{1}{n}-1}\,dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$