微分積分学 A

鈴木　咲衣

2017 年 4 月 29 日

目 次

（第一回・4/13）

1　イントロダクション

1.1　成績の付け方

講義と演義の割合 7：3 で成績をつける。講義の成績は試験と各回のフィードバックの点数の合計.

$$\text{講義の素点} = \min\left\{70, \frac{7}{10}(\text{試験（100 点満点）＋フィードバック（一回 3 点満点）})\right\}$$

1.2　参考文献

いろいろある．各自で自分にあった本を探すのが好ましい．以下は参考.

- 解析概論（高木貞治）
- 解析入門（杉浦 光夫）
- 微分積分読本（小林昭七）
- 入門微分積分（三宅 敏恒）

2　論理・集合・写像

2.1　集合と論理

定義 1 (命題)**.** 命題とは真または偽である文である．命題 P に対して，P が真のとき偽，P が偽のとき真となる命題を否定命題といい,

$$\neg P \quad (P \text{ でない})$$

とかく.

例 1.
- $P =$「24 は偶数である」（真）, $Q =$「23 は偶数である」（偽）
- $\neg P =$「24 は偶数ではない」（偽）, $\neg Q =$「23 は偶数ではない」（真）

定義 2 (否定命題と複合命題)**.** *2* つの命題 P, Q を接続詞（ならば，かつ，または）で繋いで複合してできた命題を複合命題といい,

$$\begin{aligned} &P \Rightarrow Q \quad (P \text{ ならば } Q) \\ &P \wedge Q \quad (P \text{ かつ } Q) \\ &P \vee Q \quad (P \text{ または } Q) \end{aligned}$$

とかく．とくに $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ のとき，P と Q は同値といい,

$$P \Leftrightarrow Q \quad (\text{「}P \Rightarrow Q\text{」かつ「}Q \Rightarrow P\text{」})$$

とかく.

例 2.
- 「24 が偶数 $\Rightarrow 3 \times 24$ は偶数」（真）

P	Q	$P \Rightarrow Q$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	真
偽	偽	真

表 1: $P \Rightarrow Q$ の真偽表

- 「23 が偶数 $\Rightarrow$ 3×23 は偶数」（真）
- $P \Rightarrow Q$ の真偽表（表 *1*）

演習 1. 否定命題 $\neg P$ と複合命題 $P \Leftrightarrow Q$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$ の真偽表を作成せよ.

演習 2. 二つの命題 P, Q に対し，複合命題 $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$ の否定を論理記号で表わせ.

定義 3 (集合)**.** 集合とはものの集まり（で集合論の公理を満たすもの）である．s が集合 S に含まれるとき，s は S の元（要素）といい，$s \in S$ とかく．また，二つの集合 S, T に対し，S の任意の元が T にも含まれるとき，S は T の部分集合であるといい，$S \subset T$ とかく.

定義 4 (論理記号)**.**

- $\forall$（全ての）
- $\exists$（存在する）
- $\exists!$（唯一つ存在）
- *s.t.*（のような）
- *e.g.*（例えば）
- *c.f.*（比較，参照）

例 3. 集合 S, T に対して

$$\begin{aligned} S \subset T &\Leftrightarrow \forall x (x \in S \Rightarrow x \in T), \\ S = T &\Leftrightarrow \forall x (x \in S \Leftrightarrow x \in T) \\ &\Leftrightarrow (S \subset T) \wedge (T \subset S). \end{aligned}$$

演習 3. 任意の集合 A に対して $\emptyset \subset A$ を示せ.

2.2 写像

定義 5 (写像)**.** X, Y を集合とする.

- 任意の $x \in X$ に対し Y の元 $f(x)$ をひとつ定める規則 f を，X から Y への写像といい，$f\colon X \to Y$ と書く．また，$x \in X$ に $f(x) \in Y$ が対応することを $f\colon x \mapsto f(x)$ と書く.
- 写像 $f\colon X \to Y$ と部分集合 $A \subset X$ に対し, 集合 $f(A) = \{f(a) \in Y \mid a \in A\}$ を f による A の像と呼ぶ.
- $B \subset Y$ に対し，　集合 $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ を f による B の逆像と呼ぶ.

- $f(X)=Y$ が成り立つとき， f は全射であると言う．
- $f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$ が成り立つとき，f は単射であるという．
- f が全射かつ単射であるとき，f は全単射であると言う．
- f が単射であるとき, $y \in f(X)$ に対して $y=f(x)$ となる $x \in X$ が唯一存在する．このとき，$x=f^{-1}(y)$ と書く．また，写像

$$f^{-1}\colon\ f(X) \to X, \quad y \mapsto f^{-1}(y)$$

  を f の逆写像と呼ぶ.
- 集合 X, Y, Z, 写像 $f\colon\ X \to Y$, $g\colon\ Y \to Z$ に対して，写像

$$g \circ f\colon\ X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x))$$

  を f と g の合成と呼ぶ.

演習 4. 全射性は次の命題と同値である.

$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X,\ s.t.\ f(x)=y.$$

これを論理記号を用いずに表わせ.

演習 5. 全単射性は次の命題と同値である.
「Y の任意の元 y に対して X の元 x が唯一存在し $f(x)=y$ が成り立つ.」
これをを論理記号を用いて表わせ.

3　実数の連続性

3.1　数

- 実数 $\mathbb{R}$
- 自然数 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$　（加と剰の構造）
- 整数 $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$　（加と減と剰の構造）
- 有理数 $\mathbb{Q} = \{0, \pm\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$　（加減剰余の構造）
- 無理数 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

自然数，整数，有理数は定義できているが，無理数の定義がきちんと出来ていない．無理数が定義できれば実数は有理数と無理数の和集合として定義できる．これが結構面白い．

3.2　実数の連続性

“実数は数直線上の点の集まりである．” これを数学的に定義にする方法が「切断」である．すなわち，感覚的には，実数（数直線上の点）を決めるとその点で数直線を切断する方法が定まる．また逆に，数直線を切断すると，その点として実数（数直線上の点）が定まる．すなわち，実数とは切断である．これを厳密に定義してみよう．

定義 6 (Dedekind の切断)．数（大小の順序のついた集合）S を A, B の二つの部分集合に分ける（$A \cup B = S$, $A \cap B = \emptyset$）．このとき，A, B どちらも空集合でなく，A の任意の元が B の任意の元より小さくなっているとき，部分集合の組 (A, B) をDedekind の切断と呼ぶ．

切断には次のような場合分けがある．

(1) A に最大数があり，B に最小数がある．（A と B に “飛び” がある）

(2) A に最大数がなく，B にも最小数がない．（A と B に “途切れ” がある）

(3) A に最大数があり，B に最小数がない．（A と B は “連続” している）

(4) A に最大数がなく，B に最小数がある．（A と B は “連続” している）

(4) の場合は B の最小値を A に移せば (3) になるので，そのように移り合う切断の組は同一視し，ここからは (1)–(3) のみを考える．

自然数，整数の切断は (1) しかない．すなわち，自然数，整数は任意の点で不連続であり，“飛び” がある．もっと一般に，有理数の切断について考察してみよう．

- ２つの有理数の間には必ず他の有理数があるから，(1) の切断はできない．
- 例えば $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < \sqrt{2}\}$, $B = \{b \in \mathbb{Q} \mid b > \sqrt{2}\}$ とすれば，(2) を満たす有理数の切断になる．
- 任意の有理数 p に対して $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq p\}$, $B = \{b \in \mathbb{Q} \mid b > p\}$ とすれば (3) の切断になる．

定義 7 (切断としての実数). 有理数の切断を実数と呼ぶ.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R} &= \{\ \text{有理数の切断}\ (A, B)\} \\
&\supset \mathbb{Q}' = \{\ \text{有理数の切断}\ (A, B)\ \text{で}\ (3)\ \text{をみたすもの}\ \} \sim \mathbb{Q}
\end{aligned}
$$

有理数の切断の間には自然な大小関係が定まる．すなわち，$p = (A, B)$, $p' = (A', B')$ を有理数の 2 つの切断としたとき，$A \subset A'$ のとき $p \leq p'$, $A \supset A'$ のとき $p \geq p'$ と定義する．すると有理数の切断である実数に対しても切断を定義することができて，定義より以下が成り立つ.

定理 1 (実数の連続性). 実数の切断は (3) しかない．すなわち，実数の切断 (A, B) は A と B の境界として一つの実数を確定する.

演習 6. 有理数の切断の定義を述べ，それを用いて無理数と実数を定義せよ.

3.3 続・実数の連続性

定義 8.

- S を実数 $\mathbb{R}$ の部分集合とする．$M \in \mathbb{R}$ が S の上にあるとき，すなわち

$$M \geq s,\ \forall s \in S$$

となるとき，M を S の上界と呼ぶ．このような M が存在するとき，S は上に有界であるという.

- 同様に，$m \in \mathbb{R}$ が S の下にあるとき，すなわち，

$$m \leq s,\ \forall s \in S$$

となるとき，m を S の下界と呼ぶ．このような m が存在するとき，S は下に有界であるという.

定義 9. 部分集合 $S \subset \mathbb{R}$ が上に有界のとき，最小の上界を上限と呼ぶ．同様に，S が下に有界のとき，最大の下界を下限と呼ぶ.

上限と下限の存在は明らかではない．例えば有理数で同じことをすると，上限や下限が存在しない部分集合が作れる．実数の連続性（定理 1）は以下の定理と同値である.

定理 2 (Weierstrass の定理). 実数の部分集合 $S \subset \mathbb{R}$ が上に有界ならば S には上限が存在する．同様に，下に有界ならば S には下限が存在する.

演習 7. 定理 *1* を用いて定理 *2* を示せ.

3.4 数列の収束

$\mathbb{N}$ を定義域とする実数値関数 $n \mapsto a_n$ を数列と呼び，

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, \quad (a_n)_{n>0}, \quad (a_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \text{あるいは単に } (a_n)$$

などと書く．

定義 10. (1) 数列 (a_n) が，n が大きくなるに従ってある数 α に限りなく近づくとき，すなわち

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0,\ s.t.\ n > N \Rightarrow |\alpha - a_n| < \epsilon$$

となるとき，(a_n) は α に収束するという．

このとき α を (a_n) の極限と呼び，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とか $a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$ と書く．

(2) 数列 (a_n) が，n が大きくなるに従って限りなく大きくなっていくとき，すなわち

$$\forall M > 0,\ \exists N > 0,\ s.t.\ n > N \Rightarrow a_n > M$$

となるとき，数列 (a_n) は ∞ に発散するといい，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ とか $a_n \to \infty \quad (n \to \infty)$ と書く．

(3) 数列 (a_n) が，n が大きくなるに従って限りなく小さくなっていくとき，すなわち

$$\forall M > 0,\ \exists N > 0,\ s.t.\ n > N \Rightarrow a_n < -M$$

となるとき，数列 (a_n) は $-\infty$ に発散するといい，$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とか $a_n \to -\infty \quad (n \to \infty)$ と書く．

命題 1 (コーシーの判定法)**.** 数列 a_n が収束するための必要十分条件は $\lim_{m,n\to\infty} |a_n - a_m| = 0$，すなわち，任意の $\epsilon > 0$ に対して自然数 $n_0 > 0$ が存在し

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon$$

となることである．

3.5 無限小数としての実数

“実数は無限小数である．” これを数列を用いて厳密に定義してみよう．

正の整数 m と，0 以上 9 以下の整数 $k_1, k_2, k_3 \ldots$ に対して次のような有理数列を考える．

$$a_1 = m, \quad a_2 = m.k_1, \quad a_3 = m.k_1k_2, \quad \ldots \quad a_n = m.k_1k_2\cdots k_n, \quad \ldots$$

このような数列 (a_n) を無限小数 $m.k_1k_2k_3\cdots$ で表す．$m.k_1k_2k_3\cdots$ が有理数の無限小数展開と一致する場合は，有限小数か巡回小数である．そうでない場合は (a_n) は有理数の範囲では収束しない．このとき (a_n) を無理数と呼ぶことにする．

定義 11. 有限小数と巡回少数を合わせて有理数と呼ぶ．有限小数でも巡回少数でもない無限小数を無理数と呼ぶ．有理数と無理数の和集合を実数と呼ぶ．

実数の連続性は以下の定理と同値である．

定理 3 (有界な単調数列の収束)**.** 上に（下に）有界な単調増加（減少）数列は収束する．

演習 8. 定理 *2* を仮定して定理 *3* を示せ．

3.6 区間縮小法

定義 12. 次のような $\mathbb{R}$ の部分集合を区間という.

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, a, b は実数.
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$，$a$ は実数か $-\infty$，b は実数か ∞.
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$，$a$ は実数，b は実数か ∞.
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$，$a$ は実数か ∞，b は実数.

$[a, b]$ を閉区間，(a, b) を開区間という.

実数の連続性は以下の定理と同値である.

定理 4 (区間縮小法)**.** $n = 1, 2, \ldots$ に対して閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ をとる． 各 I_{n+1} が I_n に含まれ，また，n が限りなく大きくなるとき区間 I_n の幅 $b_n - a_n$ が限りなく小さくなるならば，すべての区間に含まれるただ 1 つの数 p が存在する．すなわち $\bigcap I_n = \{p\}$.

演習 9. 定理 *3* を仮定して定理 *4* を示せ.

演習 10. 定理 *4* を仮定して定理 *1* を示せ.

3.7 有理数の稠密生

定理 5 (有理数の稠密生)**.** 任意の実数 a, b $(a < b)$ に対して，$a < q < b$ を満たす有理数 q が存在する.

定理 6 (アルキメデスの定理)**.** 任意の正の実数 a,b に対してある自然数 n 存在して $na > b$ を満たす.

演習 11. (1) 有理数に対するアルキメデスの定理を示せ.

(2) 実数の中で有理数が稠密であることを用いて実数に対するアルキメデスの定理を示せ.

演習 12. α を実数とするとき α に収束する有理数の数列 a_n が存在することを示せ.

3.8 無限級数

定義 13. (1) 数列 (u_n) に対して，その部分和からなる数列 $s_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$ をとる．すなわち

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ &\vdots \\ s_k &= u_1 + u_2 + \cdots + u_k. \end{aligned}$$

このとき，数列 $u_1, u_2, u_3 \cdots$ の無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ を

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{k\to\infty} s_k$$

と定義し，<u>無限級数</u>と呼ぶ．

(2) (s_k) が収束するとき $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ は<u>収束する</u>といい，(s_k) が発散するとき $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ は<u>発散する</u>という．

(3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ が収束するとき，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ は<u>絶対収束する</u>という．

(4) 絶対収束しないが収束はするとき，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ は<u>条件収束する</u>という．

演習 13. 無限級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{1}$$

は (a) 条件収束するが (b) 絶対収束はしないことを示せ．

演習 14 (ディリクレの定理)**.** (a) 絶対収束する級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は足し算の順に無関係であることを示せ．

(b) 条件収束する級数 $\sum a_n$ は項の順序を変更すると任意の実数 C に収束させることができる．また，$\pm\infty$ に発散させることもできる．これを示せ．

例題 1. 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとする．このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

例題 2. $|a| > 1$ ならば次の級数

$$\frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \cdots + \frac{2^n}{1+a^{2^n}} + \cdots$$

は $\dfrac{1}{a-1}$ に収束することを示せ．

例題 3. 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k}$ は収束することを示せ．

3.8.1 収束の判定法

命題 2 ([3])**.** 収束する級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ と実数 c に対して以下が成り立つ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$,

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

証明のポイント. 定義に戻って考える. (1) の証明：任意の $\epsilon > 0$ に対し十分大きな N' を取れば，すべての $k \geq N'$ に対し

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{k} u_n\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

同様に十分大きな N'' を取れば，すべての $k \geq N''$ に対し

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{k} v_n\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

N を N' と N'' の大きい方に取れば

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{k}(u_{n+}v_n)\right| < \epsilon.$$

(2) も同様.

命題 3 (コーシー列の収束・級数 var.)**.** 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が収束するための必要十分条件は,

$$\lim_{m,n\to\infty} |u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| = 0$$

となることである.

証明のポイント. 命題 *1* の言い換え.

命題 4. すべての $u_n \geq 0$ であれば，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が収束するための必要十分条件は，部分和の数列 $s_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$ が有界であることである.

証明のポイント. $\{s_n\}$ は単調増加. 定理 *3* を使う.

命題 5. (1) 定数 C が存在してすべての n に対して $0 \leq v_n \leq C \cdot u_n$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が収束するならば $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ も収束する.

(2) 定数 C が存在してすべての n に対して $0 \leq C \cdot u_n \leq v_n$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が発散するならば $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ も発散する.

証明のポイント. 命題 *4* の応用. $s_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$, $t_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ とおく.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が収束するとき $\{s_k\}$ は上に有界で，K を上界とすれば CK は $\{t_n\}$ の上界.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ が収束するとき $\{t_k\}$ は上に有界で，K をその上界とすれば $\frac{K}{C}$ は $\{s_n\}$ の上界となり $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ は収束する.

系 1. $u_n, v_n > 0$ で $L = \lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n}$ が存在して 0 でないとすると，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が収束（発散）すると $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ も収束（発散）する.

証明のポイント. 十分大きな N に対して $n > N$ ならば $0 \leq \frac{v_n}{u_n} \leq 2L$ となる. C を $2L, \frac{v_1}{u_1}, \cdots, \frac{v_N}{u_N}$ のすべてより大きく取ると $0 < v_n \leq Cu_n$ となり，命題 *5* を用いると証明できる.

命題 6 (比例判定法)**.** $u_n, v_n > 0$ とし，N を自然数とする．すべての $n \geq N$ に対し

(1) $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$ が成り立つとき，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が収束すると $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ も収束する．

(2) $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geq \frac{u_{n+1}}{u_n}$ が成り立つとき，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が発散すると $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ も発散する．

証明のポイント. (1) の場合

$$v_n = \frac{v_{N+1}}{v_N}\frac{v_{N+2}}{v_{N+1}}\cdots\frac{v_n}{v_{n-1}}v_N \leq \frac{u_{N+1}}{u_N}\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\cdots\frac{u_n}{u_{n-1}}v_N = \frac{v_N}{u_N}u_n.$$

$\frac{v_N}{u_N} = C$ として定理 5 を使う．

系 2 (コーシーの判定法)**.** 定数 C と $0 < r < 1$ が存在して，ある N より大きいすべての n に対して $0 \leq v_n \leq Cr^n$ が成り立てば，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ は収束する．特に，$\lim_{n\to\infty} v_n^{\frac{1}{n}}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} v_n^{\frac{1}{n}} < 1$ なら $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ は収束する．

証明のポイント. $u_n = r^n$ として命題 5 を使う．

系 3 (ダランベールの判定法)**.** $v_n > 0$ で，ある N より大きいすべての n に対して $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq r < 1$ が成り立てば，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ は収束する．特に，$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ なら $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ は収束する．

証明のポイント. $u_n = r^n$ として命題 6 を使う．

（第五回・5/18）

4　関数

4.1　関数の極限

$f(x)$ を $\mathbb{R}$ もしくは $\mathbb{R}$ のある区間で定義された関数とする．

定義 14. 任意の数列 $a_n \to a,\ (n \to \infty)$ に対して $f(a_n) \to l,\ (n \to \infty)$ となるとき，f は点 a において極限 l を持つという．このとき

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad とか \quad f(x) \xrightarrow{x \to a} l$$

と書く．

4.2　連続関数とその性質

定義 15 (連続関数と一様連続関数)**.**

- $f(x)$ を $\mathbb{R}$ もしくは $\mathbb{R}$ のある区間 I で定義された関数とする．x が点 $a \in I$ に近づくとき $f(x)$ が $f(a)$ に近づくならば，すなわち

  $$\forall \epsilon, \exists \delta,\ \ s.t.\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

  が成り立つならば，関数 $f(x)$ は点 a において連続といい，

  $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

  などと書く．$f(x)$ が点 a で連続であることは，任意の数列 $a_n \to a\ (n \to \infty)$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ が存在して

  $$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \to \infty} a_n) = f(a)$$

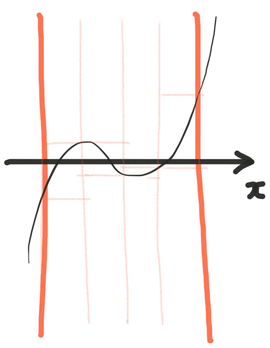
  が成り立つことと同値である．

- $f(x)$ が定義域の各点で連続であるとき，関数 f は連続であるという．

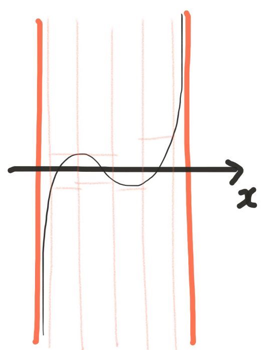
- $f(x)$ を $\mathbb{R}$ もしくは $\mathbb{R}$ のある区間 I で定義された関数とする．x が点 $a \in I$ に近づくとき $f(x)$ が $f(a)$ に近づき，さらにその近づき方が一様のとき，すなわち

  $$\forall \epsilon, \exists \delta,\ \ s.t.\ \forall a \in I, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

  が成り立つとき，関数 $f(x)$ は一様連続であるという．



一様連続



一様連続でない

演習 15. 任意の有理数において不連続，任意の無理数において連続なる関数を構成せよ.

演習 16. $f(x)$ がある区間 $[a,b]$ の有理数に関してのみ定義されていて，かつ連続の条件，すなわち任意の有理数 $c \in [a,b]$ に対して

$$\forall \epsilon, \exists \delta,\ s.t.\ |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \epsilon$$

となるとき，$f(x)$ を拡張して区間 $[a,b]$ 全体で連続な関数が得られるだろうか？

定理 7 (連続関数の加減剰余と合成).

- 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が点 a で連続のとき，関数 $f(x) \pm g(x)$，$cf(x)$，$f(x)g(x)$ $\frac{f(x)}{g(x)}$ は点 a において連続で，以下が成り立つ.
  - (i) $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = f(a) \pm g(a)$
  - (ii) $\lim_{x\to a} cf(x) = cf(a) \quad (c: \text{定数})$
  - (iii) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = f(a)g(a)$
  - (iv) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \quad (g(x) \neq 0$ のとき$)$
- 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で連続で，関数 $z = g(y)$ が $y = f(a)$ で連続ならば，合成関数 $z = f(f(x))$ は $x = a$ で連続で，以下が成り立つ.

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(f(a))$$

定理 8 (中間値の定理). $f(x)$ を区間 $[a,b]$ で連続な関数とし，α を $f(a)$ と $f(b)$ の間の数とする．このとき，区間 $[a,b]$ 内の点 c が存在して $f(c) = \alpha$ となる.

証明のポイント. $f(a) = f(b)$ のとき自明. $f(a) \neq f(b)$ とする.
$I_0 = [a_0, b_0]$ とおく. $[a_n, b_n]$ が定義されたとき，帰納的に $I_n = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ を以下のように定める

$$I_{n+1} = \begin{cases} [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] & f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq \alpha \text{のとき} \\ [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] & f(\frac{a_n+b_n}{2}) < \alpha \text{のとき} \end{cases}$$

とおく．したがって区間縮小法により

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{c\}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

また，任意の n に対して

$$f(a_n) \leq \alpha \leq f(b_n).$$

すると $f(x)$ の連続性から

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(c), \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(c).$$

したがって式 (2) で両辺の極限をとると $f(c) \leq \alpha \leq f(c)$. よって $f(c) = \alpha$.

例題 4. 区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ のとる値がすべて有理数ならば、$f(x)$ は定数関数であることを示せ。

例題 5. 奇数次の実数係数多項式 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ $(a_n \neq 0$, n は奇数$)$ が定める方程式 $f(x) = 0$ は少なくとも 1 つ実数解をもつことを示せ.

定理 9 (ワイヤシュトラスの定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 f の値は有界で，この区間のどこかで最大値および最小値をとる．

数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ の部分集合を同じ順に並べたものを部分列と呼び，$a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}, \cdots$ のように書く．

補題 1. 有界な数列 (x_n) は収束する部分列を持つ．

証明のポイント. 数列 (x_n) の上界 M と下界 m を取り，$I_1 = [a_1, b_1] = [m, M]$ とおく．さらに $k \geq 1$ に対して

$$I_{k+1} = \begin{cases} [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}], & [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] \text{ に無限個の } x_n \text{があるとき} \\ [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k], & \text{それ以外} \end{cases}$$

とおくと定理 *4*（区間縮小法）よりある点 $p \in [m, M]$ が存在し $\cap I_k = \{p\}$ となる．各 I_k から (x_n) の項 x_{n_k} を $n_k < n_{k+1}$ となるよう一つづつ取れば，数列 (x_{n_k}) は数列 (x_n) の部分列になり，それは p に収束する．

補題 2. 数列 (a_n) が α に収束（$\pm\infty$ に発散）するとき，任意の部分列 (a_{j_n}) も α に収束（$\pm\infty$ に発散）する．

証明のポイント. 定義に戻る．

補題 3. 閉区間 $[a,b]$ に値を取る数列 (x_n) が収束するならば，収束先は $[a,b]$ に含まれる．

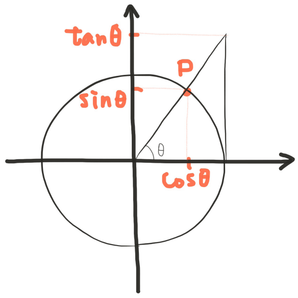
証明のポイント. (x_n) の下界として a, 上界として b をとると，補題 *1* の証明より，数列 (x_n) の部分列 (x_{n_k}) が存在し，それは $p \in [a,b]$ に収束する．従って補題 *2* より (x_n) も $p \in [a,b]$ に収束する．

定理 9 の証明のポイント. まず有界性を示す．関数 f が上に有界でないとして矛盾を導く．関数 f が上に有界でないとすると，任意の自然数 n に対して点 $x_n \in [a,b]$ であって $f(x_n) > n$ となるものが取れる．従って補題 *1* より数列 x_n の収束部分列 x_{n_k} が取れる．補題 *3* より $x_{n_k} \to x$ とすると $x \in [a,b]$. f は x で連続であるから, 数列 $f(x_{n_k})$ は実数 $f(x)$ へ収束する．一方 $f(x_{n_k}) > k$ となり，$f(x_{n_k})$ は発散する．これは矛盾である．

次に最大値および最小値の存在を示す．f は有界であることは上で示したので，$f([a,b])$ の下限 m と上限 M をとる．それらが最小値と最大値になること，すなわちある $x, X \in [a,b]$ が存在して $f(x) = m, f(X) = M$ となることを示す．ここでは最大値の場合のみ示す．f が定数関数でないとすると，上限の定義により，$M - \frac{1}{N} \in f([a,b])$ となる十分大きな自然数 N が存在する．すなわち $x_1 \in [a,b]$ が存在して $f(x_1) = M - \frac{1}{N}$ となる．同様に，$f(x_n) = M - \frac{1}{N+n}$ となる数列 (x_n) をとると，$f(x_n)$ は M に収束する．$[a,b]$ は閉区間（特に有界）より，補題 *1* より数列 (x_n) は収束する部分列 (x_{n_k}) を持ち，補題 *3* より $x_{n_k} \to x \in [a,b]$ となる．ここで f は点 x において連続なので，$f(x_{n_k})$ は $f(x)$ に収束する．すると $f(x_{n_k})$ は $f(x_n)$ の部分列なので，補題 *2* より $f(x) = M$ である．

4.3　三角関数

この講義では角の大きさをラジアン（radian）で表す．単位円上の点 P の座標を (x, y) とするとき，図の角度 θ に対して $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ を次で定義する．



$$x = \cos\theta,$$
$$y = \sin\theta,$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

円周ひとまわりの角度は 2π より，これらの関数は周期 2π の周期関数である．

定理 10 (加法定理)**.**　(1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

(2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

演習 17. 次で定義される函数 f は a をどうとっても $x=0$ で不連続であることを示せ．

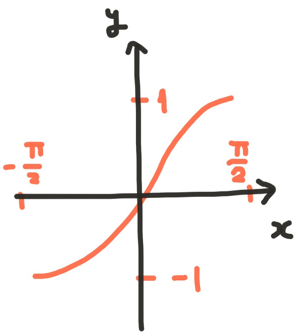
$$f(x) = \begin{cases} a & (x = 0) \\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \end{cases}$$

4.4　逆三角関数

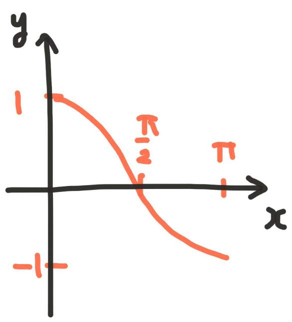
$y = \sin x$ は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ で単調増加，$y = \cos x$ は $[0, \pi]$ で単調減少，$y = \tan x$ は $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ で単調増加であるから，それぞれの範囲で逆関数が存在する．これらをそれぞれ

$$x = \arcsin y, \quad x = \arccos y, \quad x = \arctan y$$

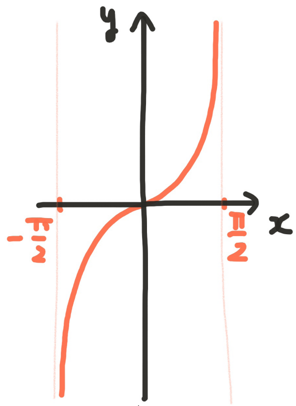
とかく．



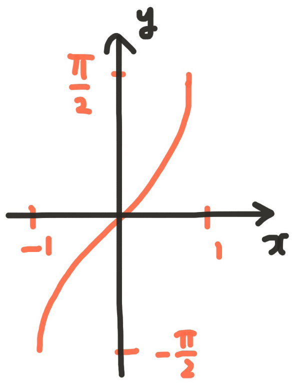
$\sin x$



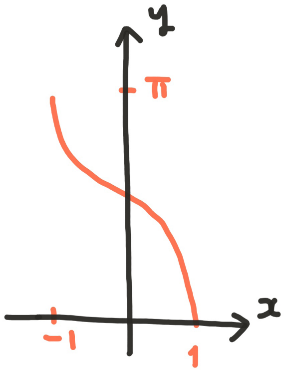
$\cos x$



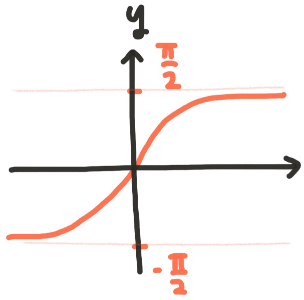
$\tan x$



arcsin x



arccos x



arctan x

4.5　指数関数と対数関数

$a > 0$, $a \neq 1$ のとき，指数関数 a^x を以下で定義する．

定義 16. $a > 1$ とする．

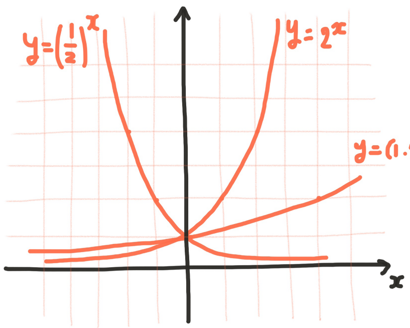
(1) 自然数 n に対して $x^n = a$ となる $x > 1$ がただひとつ存在する．このとき $x = a^{1/n}$ と書く．

(2) 正の有理数 $x = m/n$ に対して $a^x = (a^{1/n})^m$ と定義する．これは m, n の取り方によらない．

(3) 実数 $x \geq 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となる単調増加有理数列 $\{x_n\}$ をとる．このとき $\{a^{x_n}\}$ は収束し，しかも数列 $\{x_n\}$ の取り方によらない．この極限を $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$ と書く．$x < 0$ のときは $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ と定義する．

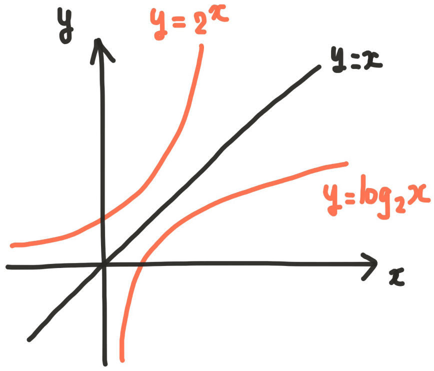
$0 < a < 1$ のときも同様に a^x を定義する．

定理 11. 指数関数 a^x は $(-\infty, \infty)$ において連続である．a^x は $a > 1$ のとき単調増加であり，$0 < a < 1$ のとき単調減少である．



定義 17. $a > 0$, $a \neq 1$ に対して，指数関数 a^x は逆関数を持つ．この逆関数を $x = \log_a(y)$ と書き，a を底とする対数関数という．

定理 12. 対数関数は $(0, \infty)$ で定義される連続関数である．$y = \log_a x$ は $a > 1$ のとき単調増加，$0 < a < 1$ のとき単調減少である．



定義 18. 数列 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ は収束する（上に有界な単調増加数列であることを示す.）この数列の極限を $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とおき，ネピアの定数と呼ぶ．特に混乱のない場合は $\log_e x = \log x$ と添字 e を省略する．

例題 6 ([3])**.** $x \in (0,\infty)$ とする．次を示せ．

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

例題 7. 極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ．

（第六回・5/25）

5　一変数関数の微分法

5.1　微分係数と導関数

定義 19 (一変数関数の微分)**.** 区間 $I \subset \mathbb{R}$ と関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ をとる．

- $a \in I$ に対し，極限

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

  が存在するとき，f は a で微分可能であるという．この極限を a での微分係数と呼び，

$$f'(a), \quad \frac{df(a)}{dx}, \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

  などとも書く．

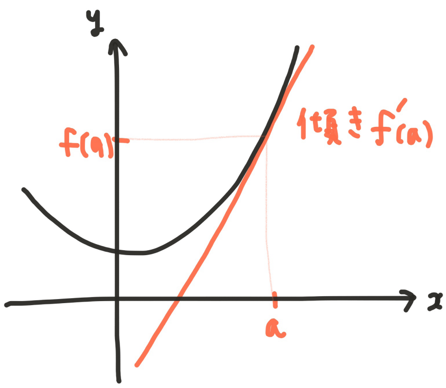
- f がすべての $a \in I$ に対して微分可能のとき，f は微分可能であるという．

- 微分可能な関数 f に対し，関数

$$f'\colon I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

  を f の導関数と呼ぶ．

$f'(a)$ は点 $f(a)$ におけるグラフの接線の勾配である．$f(a)$ における接線は $f(a)$ の近傍におけるグラフの一次近似である．



例題 8. 区間 $[a, b]$ において微分可能な関数 $f(x)$ が点 $c \in (a, b)$ で（弱い意味で）極大値をとるとする．すなわち

$$\exists \delta > 0, \ s.t. \ |x - c| < \delta \Rightarrow f(c) \geq f(x)$$

とすると，$f'(c) = 0$ となることを示せ．

定理 13. ある区間において関数 $f(x), g(x)$ が微分可能ならば

(1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,

(2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(3) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.　（ただし $g(x) \neq 0$.）

証明のポイント. 定義に従って確かめる.

命題 7. 関数の連続性は微分可能性の必要条件である.

証明のポイント. 関数 $f(x)$ が微分可能であれば任意の点 a で $x \to a$ のとき $|f(x) - f(a)| \to 0$ である.

演習 18. 関数の連続性は微分可能性の十分条件ではない. 実際, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, f(0) = 0$ に対して

(1) $f(x)$ の概形を描け.

(2) $f(x)$ が $x = 0$ でも連続であることを示せ. ($f(x) = \sin \frac{1}{x}$ の場合と比較してみよう.)

(3) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能でないことを示せ.

定義 20. 区間 $[0,1]$ を三等分して中央の開区間 $I_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ を除く. 残りの二つの区間をまた三等分して開区間 $I_{01} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ と $I_{02} = \left(\frac{7}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}, \frac{8}{9} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right)$ を除く. 同様に, 1 と 2 からなる任意の列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ に対して開区間 $I_{0i_1i_2\cdots i_n}$ が定まり, それを除いていく. このような操作を無限回繰り返し, 残った点の集合 C をカントール集合という.

定義 21 (カントールの悪魔の階段). 以下の 2 つの関数の定義は同値である. このように定まる区間 $[0,1]$ の関数をカントール関数(カントールの悪魔の階段)と呼ぶ.

(1) まず閉区間 $\overline{I_0}$ 上で $f(x) = \frac{1}{2}$ とする. 次に $\overline{I_{01}}$ 上で $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $\overline{I_{02}}$ 上で $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ とする. 同様に, 1 と 2 からなる任意の列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ に対しする閉区間 $\overline{I_{0i_1i_2\cdots i_n}}$ 上で $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i_k} \frac{1}{2^{k+1}}$ とする. これを無限回繰り返す.

(2) $x \in [0,1]$ を三進小数展開する. 小数展開の中に 1 があるとき, そのうち最初に現れるものを残してそれより後の全ての桁を 0 にする. そのようにして得られた小数の中に数字 2 が残っていれば, それらを全て 1 に替える。最後に得られた小数を二進小数だと思って実数を得る, この実数を $f(x)$ と定める.

演習 19. (1) カントールの悪魔の階段の概形を描け.

(2) カントールの悪魔の階段は連続であることを示せ.

(3) カントールの悪魔の階段はカントール集合を除いて微分が 0 になることを示せ.

すなわち, カントールの悪魔の階段は連続で, "ほとんどいたるところで(測度 0 の集合を除いていたるところで)" 微分が 0 なのに定数関数ではない! という変な関数である.

5.2 合成関数の微分

定理 14 (合成関数の微分). 関数 $y = f(x)$ と $z = g(y)$ が微分可能であれば, 合成関数 $z = g(f(x))$ も微分可能であり, 連鎖率

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

が成り立つ.

証明のポイント. 定義に戻って証明する.

5.3 逆関数の微分

定理 15 (逆関数の微分)**.** 関数 $y = f(x)$ は，区間 I において微分可能で単調な関数とする．$f'(x) \neq 0$, $x \in I$ ならば，逆関数 $x = f^{-1}(y)$ は $J = f(I)$ で微分可能で

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$$

となる．

証明のポイント． $a \in I$, $b = f(a)$ とすると

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \left(\frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}\right)^{-1} = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)^{-1}.$$

例題 9. 次の曲線の接線を求めよ．

(1) $y = x \log x$, $\quad (x = 1$ において $)$

(2) $y = \arctan \frac{x^2}{2}$, $\quad (x = \sqrt{2}$ において $)$

例題 10. 次の関数の導関数を求め，それが $(-\infty, \infty)$ で連続かどうか調べよ．

(1)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

5.4 平均値の定理

定理 16 (ロルの定理)**.** 関数 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続，$a < x < b$ で微分可能であるとする．もし $f(a) = f(b)$ であれば $a < c < b$ なる c が存在し $f'(c) = 0$ となる．

証明のポイント． $f(x)$ が定数関数ならば主張は明らか．$f(x)$ が定数関数でないとする．このときワイヤシュトラスの定理 *9*（閉区間で連続な関数は極値をもつ.）と例題 *8*（極値では微分が 0 になる）より主張が従う．

定理 17 (平均値の定理)**.** 関数 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続，$a < x < b$ で微分可能であるとする．このとき点 $c \in (a, b)$ が存在して

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成り立つ．

証明のポイント． $l = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $F(x) = f(x) - l(x - a)$ とおき，ロルの定理を適用する．

定理 18 (コーシーの平均値の定理)**.** 関数 $f(x), g(x)$ は $[a, b]$ で連続で，(a, b) で微分可能とする．$g(a) \neq g(b)$ かつ $g'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$, ならば，次の式を満たす c $(a < c < b)$ が存在する．

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

証明のポイント． $l = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, $F(x) = f(x) - l(g(x) - g(a))$ とおき，ロルの定理を適用する．

定理 19 (ロピタルの定理)**.** 関数 $f(x), g(x)$ は a の近くで定義されていて，微分可能とする．$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = 0$ で $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば，$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在し

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

証明のポイント． $f(a) = g(a) = 0$ と定義すると $f(x), g(x)$ は共に a で連続．コーシーの平均値の定理を適用する．

例題 11 ([4])**.** 次を示せ．

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{x} = 2$

(2) $\lim_{x\to +0} x^x = 1$

証明のポイント． ロピタルの定理の応用．

演習 20 (ロルの定理の拡張)**.** $[a, \infty)$ において $f(x)$ が微分可能で $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$ ならば $c > a$, $f'(c) = 0$ なる c が存在することを示せ．

演習 21． (1) $a > 0$, $\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{(a+x^2)^a} = \frac{P_n(x)}{(a+x^2)^{a+n}}$ とすれば，$P_n(x)$ は n 次の多項式で，それは n 個の相異なる実根をもち，それらの根は $P_{n-1}(x)$ の根によって隔離されることを示せ．

(2) $\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$ に対しても同様．($H_n(x)$: *Hermite* の多項式)

(3) $e^x \frac{d^n}{dx^n} x^n e^{-x} = L_n(x)$ に対しても同様．($L_n(x)$: *Laguerre* の多項式)

5.5　高階導関数

関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が再び連続で微分可能ならば，その微分を

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

と書き，$f(x)$ の第 2 階微分と呼ぶ．同様に，第 n 階微分 $\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ を帰納的に定める．

定理 20 (ライプニッツの公式)**.** 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が n 回微分可能であるとする．このとき

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

が成り立つ．

5.6　偏微分

変数が 2 つ以上の関数において，一つの変数のみ変動させて微分をとることを偏微分という．たとえば二変数関数 $f(x, y)$ に対して

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x := \lim_{x \to a} \frac{f(x, y) - f(a, y)}{x - a}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y := \lim_{y \to a} \frac{f(x, y) - f(x, a)}{y - a}$$

などと書く．

$f(x, y)$ をまず x に関して微分して f_x を得，次に y に関して微分して第二回の導関数 f_{xy} $= (f_x)_y$ を得たとする．次に微分の順序を逆にすると $f_{yx} = (f_y)_x$ を得る．このとき，2 つの第二回導関数 f_{xy} と f_{yx} は一致するとは限らない．

定理 21. ある領域において f_{xy} と f_{yx} が連続ならばその領域で $f_{xy} = f_{yx}$.

例題 12 ([1, p58])**.** 次の関数の二階導関数 $f_{xy}(0, 0)$ と $f_{yx}(0, 0)$ を求めよ．

$$\begin{cases} f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0. \end{cases}$$

5.7 テイラーの定理

定理 22 (テイラーの定理)**.** 関数 $f(x)$ が区間 I で n 回微分可能であれば，区間 I の任意の実数 a と b に対して，a と b の間にある実数 ξ が存在し，

$$f(b)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

が成り立つ．最後の項　$R_n=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$ を剰余項という．

証明のポイント． $n=1$ の場合，$g_1(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ とおくと，$g_1(a)=g_1(b)=0$．したがってロルの定理 *20* より $\xi_1\in[a,b]$ が存在し

$$g_1'(\xi_1)=f'(\xi_1)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

すなわち

$$f(b)=f(a)+f'(\xi_1)(b-a).$$

（これは平均値の定理である.）

$n=2$ の場合，$g_2(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{(b-a)^2}(x-a)^2$ とおくと，$g_2(a)=g_2(b)=0$．したがってロルの定理 *20* より $\tilde{\xi}_2\in[a,b]$ が存在し

$$g_2'(\tilde{\xi}_2)=f'(\tilde{\xi}_2)-f'(a)-2\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{(b-a)^2}(\tilde{\xi}_2-a)=0.$$

$g_2'(\tilde{\xi}_2)=g_2'(a)=0$ より，再びロルの定理 *20* より $\xi_2\in[a,\tilde{\xi}_2]$ が存在し

$$g_2''(\xi_2)=f''(\xi_2)-2\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{(b-a)^2}=0.$$

すなわち

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(b-a)^2.$$

これを繰り返すと定理が得られる．

定理 22 において，$f(x)$ の各階の微分が可能で，区間内のすべての x に関して $\lim_{n\to\infty}R_n=0$，すなわち

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

であるとき，この無限級数を $f(x)$ のテイラー級数という．特に $a=0$ のときはマクローリンの級数という．

例 4.
(i) $f(x)$ が n 次の多項式の場合は $f^{(n+1)}(x)=0$ よりテイラー級数は有限になり，これは $f(x)$ を $(x-a)$ の多項式として表したものになる．

(ii) $f(x)=e^x$ の場合はすべての n に関して $f^{(n)}(x)=e^x$．従って $a=0$ とすれば $f^{(n)}(0)=1$ で $R_n=\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}$，$0<\theta<1$．すなわち x を固定すれば $|R_n|\to 0$，$(n\to\infty)$．従って $-\infty<x<\infty$ において

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

(iii) $f(x) = \sin x$ の場合，$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$, $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ より $a = 0$ とすれば $f^{(2n+1)}(0) = 0$, $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ で，$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x)$, $0 < \theta < 1$．この場合も x を固定すれば $|R_n| \to 0$ となるため

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(iv) $f(x) = \cos x$ の場合も同様に

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

演習 22 (合成関数の高階微分 [1])．関数 $F(u)$ において $u = \phi(x)$ とすれば

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} F(u) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i} \frac{1}{i_1! i_2! \cdots i_n!} F^{(k)}(u) \left(\frac{\phi'}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{\phi''}{2!}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{\phi^{(n)}}{1!}\right)^{i_n}$$

となることを示せ．ただし i の和は $i_1 \geq 0, i_2 \geq 0, \ldots, i_n \geq 0$, $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k$, $i_1 + 2i_2 + \cdots n i_n = n$ なる整数の組 $i = (i_1, \ldots i_n)$ すべてをはしる．また $0! = 1$ と定めた．

5.8 ニュートンの近似法

演習 23 ([1])． (1) 区間 $[a, b]$ において $f(x)$ とその導関数が微分可能，かつ $f''(x) > 0$, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ ならば

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}, \cdots$$

とするとき，数列 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ は $[a, b]$ における $f(x) = 0$ のただ一つの根に収束する（ニュートンの近似法）．これを示せ．

(2) $\cos x = x$ の解を (1) の方法で近似せよ（三角関数の真数表を用いる）．

6　一変数関数の積分法

前章までは関数の微分を考えてきた．この章では逆に，ある関数の微分が与えられたとき，その関数を求めるという問題を考える．

6.1　原始関数

定義 22. 関数 $f(x)$ に対して $F'(x) = f(x)$ となるような可微分関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数と呼ぶ．

2 つの原始関数 $F(x)$ と $G(x)$ は $F'(x) = G'(x) \Leftrightarrow F'(x) - G'(x) = 0$ より，$F(x) - G(x)$ は定数である．$f(x)$ の原始関数を $\int f(x)dx$ と書く．以下に基本的な対応を列挙する ([1])．

$f(x) = F'(x)$	$F(x) = \int f(x)dx$
$x^t \quad (t \neq -1)$	$\frac{x^{t+1}}{t+1}$
$\frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$	$\log \lvert x \rvert$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{1-x^2} \quad (\lvert x \rvert < 1)$	$\frac{1}{2} \log \left\lvert \frac{1+x}{1-x} \right\rvert$
$\frac{1}{x^2-1} \quad (\lvert x \rvert > 1)$	$\frac{1}{2} \log \left\lvert \frac{x-1}{x+1} \right\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\lvert x \rvert < 1)$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (\lvert x \rvert > 1)$	$\log \lvert x + \sqrt{x^2-1} \rvert$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\log \lvert x + \sqrt{x^2+1} \rvert$
$\sqrt{1-x^2} \quad (\lvert x \rvert \leq 1)$	$\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$
$\sqrt{x^2-1} \quad (\lvert x \rvert \geq 1)$	$\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \log \lvert x + \sqrt{x^2-1} \rvert)$
$\sqrt{x^2+1}$	$\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} - \log \lvert x + \sqrt{x^2+1} \rvert)$
e^x	e^x
$a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\log a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\log \lvert \cos x \rvert$
$\cot x$	$\log \lvert \sin x \rvert$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

6.2 原始関数の計算法

6.2.1 部分積分

微分可能な関数 f, g の積の積分の公式

$$\frac{d}{dx}(fg) = f'g + fg'$$

の両辺の原始関数を考えると

$$fg = \int f'gdx + \int fg'dx$$

が従い，部分積分の公式が得られる．

定理 23 (部分積分の公式)**.** 微分可能な関数 f, g に対して

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

が成り立つ．

6.2.2 置換積分

合成関数の連鎖率

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int f(x)dx\right) &= \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)\frac{dx}{dt} \\ &= f(x(t))\frac{dx}{dt}\end{aligned}$$

より，置換積分の公式が得られる

定理 24 (置換積分の公式)**.** $f(x)$ が連続，$x = x(t)$ を t の連続関数とするとき，

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))\frac{dx}{dt}dt$$

が成り立つ．

例題 13. 次の関数の原始関数を求めよ．

(1) $x^a \log x$, $(a \neq -1)$

(2) $x^n e^x$, $(n \in \mathbb{N})$

(3) $(\log x)^n$, $(n \in \mathbb{N})$

(4) $\arcsin x$

(5) $\cos^2(x)$

(6) $\frac{(\log x)^2}{x}$

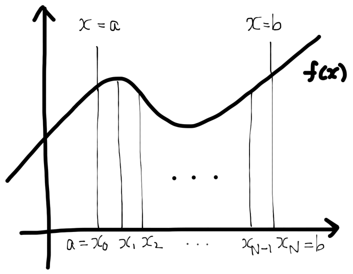
(7) $\frac{x^2+2}{(x+1)^3}$

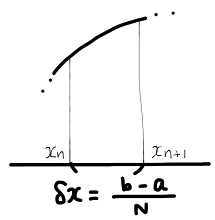
(8) $\sin^3 x \cos^2 x$

6.3 定積分

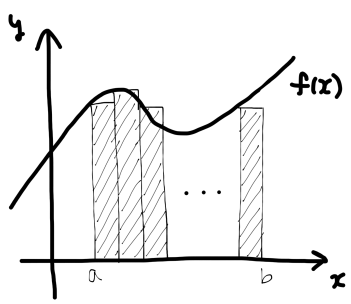
区分求積法により，有界なグラフ $y = f(x)$ と x 軸，２つの直線 $x = a, b$ で囲まれた面積を定義する．

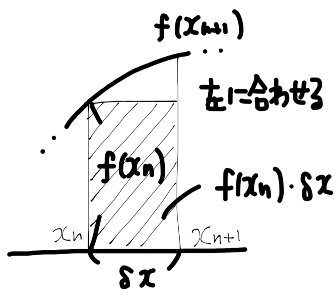
1. 区間 $[a, b]$ を N 分割する．分割された区間の長さは $\delta x = \frac{b-a}{N}$.





2. 領域を短冊で近似する．





3. 短冊の面積を足し上げる．

$$\text{短冊の面積の和} = \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\delta x \tag{2}$$

4. 分割を細かくし（N を大きくする），その極限として面積 $\int_a^b f(x)dx$ を定義する．

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\delta x \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

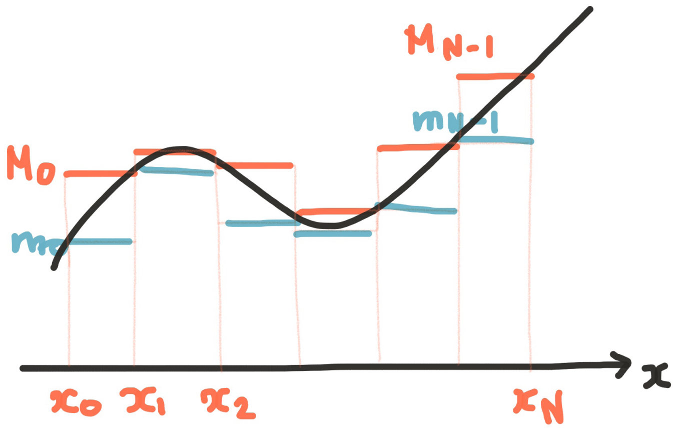
正確には，任意の $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ に対して $\sum_{n=0}^{N-1} f(\xi_n)\delta x$ が $N \to \infty$ で一定の値 A に近づくとき，$f(x)$ を可積分関数と呼び，$A = \int_a^b f(x)dx$ と表し領域の面積と定義する．すなわち極限が短冊の取り方に依らずに定まるということである．これは次を確かめるのと同値である．

ある細分 Δ によって定まる区間 $[x_i, x_{i+1}]$ の最大値 M_i でできる短冊と最小値 m_i でできる短冊の和

$$S_\Delta = \text{最長の短冊の面積の和} = \sum_{n=0}^{N-1} M_n \delta x \tag{4}$$

$$s_\Delta = \text{最短の短冊の面積の和} = \sum_{n=0}^{N-1} m_n \delta x \tag{5}$$

を考える．



このとき明らかに

$$s_\Delta \leq S_\Delta.$$

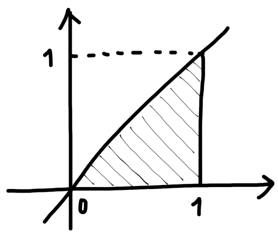
従って，細分 Δ の仕方すべてを考えたときの s_Δ の上限 $s = \sup_\Delta s_\Delta$ と S_Δ の下限 $S = \inf_\Delta S_\Delta$ に対する不等式

$$s \leq S \tag{6}$$

が得られる．この式 (6) で等号 $s = S$ が成り立つことと $f(x)$ が可積分であることが同値である．

定理 25 (連続関数の積分可能性)．（区分的に）連続な関数は可積分である．

例 5. 関数 $f(x) = x$ と x 軸，２つの直線 $x = 0, 1$ で囲まれる面積は以下で求められる．



$$\begin{aligned}
\text{面積} = \int_0^1 x dx &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n}{N} \cdot \frac{1}{N} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} n \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \cdot \frac{1}{2} N(N-1) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

演習 24 ([2]). 関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ は無理数}) \\ 1/q & (x = p/q \text{ が既約分数}, q > 0) \end{cases}$$

は任意の有界閉区間 I 上で可積分で $\int_I f(x)dx = 0$ となることを示せ.

例題 14. 次の不等式が成り立つことを示せ.

(1) $\log(1+\sqrt{2}) < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} < \frac{\pi}{2}$, $(n > 2)$

(2) $\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(3) $\frac{1}{R}(1-e^{-\frac{\pi}{2}R}) < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx < \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R})$, $(R > 0)$

6.3.1 微分積分学の基本定理

与えられた関数 $f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を求めるとき，上の定義に戻って計算するのはめんどくさい．微分積分学の基本定理は，原始関数と定積分を関係づけ，原始関数を求めるテクニックで定積分を計算することを可能にする．

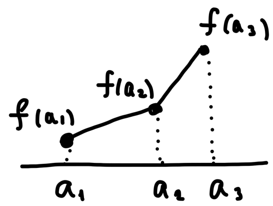
定理 26 (微分積分学の基本定理)．$f(x)$ を可積分関数とする．$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする．このとき以下が成り立つ．

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

証明のポイント．$[a, b]$ で微分可能な関数 $f(x)$ に関して以下を示す．

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)dx &= \lim_{\delta x \to 0} \sum f'(x_n)\delta x \\ &= \lim_{\delta x \to 0} \sum \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{\delta x}\delta x \\ &= \lim_{\delta x \to 0} f(b) - f(a) \\ &= f(b) - f(a).\end{aligned}$$



$f(a_3) - f(a_2) + f(a_2) - f(a_1)$
中身は打ち消し合う

微分積分学の基本定理は，その名の通り，微分積分学の基本になっている定理である．特に，ベクトル解析の重要な定理のほとんどがこの定理に帰着する（さらっと概観）．

定理 27 (部分積分の公式・定積分の場合)．区間 $[a, b]$ において f, g が微分可能で f', g' が連続ならば

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

が成り立つ．

定理 28 (置換積分の公式・定積分の場合)．$f(x)$ が $[a, b]$ を含む区間 $[a', b']$ で連続，$x(t)$ は $[\alpha, \beta]$ をで連続で，t が α から β まで変動するとき $a' \leq x \leq b'$，かつ $x(\alpha) = a, x(\beta) = bx = x(t)$ とするとき，

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx}{dt}dt$$

が成り立つ．

演習 25 ([2]). (1) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta \ (n \in \mathbb{N})$ を求めよ.

(2) $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ を求めよ.

6.3.2 原始関数と不定積分

定義 23. 積分可能な関数 $f(x)$ に対して

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

とおき，$F(x)$ を $f(x)$ の積分関数と呼ぶ．このとき特に下限 a を指定しないで $F(x) = \int f(t)dt$ とかき，不定積分と呼ぶこともある．

定理 29.
- $F(x)$ は連続関数になる．
- $f(x)$ が点 a において連続であれば，積分関数 $F(x)$ は a において微分可能で

$$F'(x) = f(x)$$

が成り立つ．

$f(x)$ が連続であれば，原始関数は積分関数（不定積分）として得られ[1]，微分と積分が互いに逆の操作になっている．しかし，$f(x)$ が連続ではないとき，$F'(x) = f(x)$ でも $f(x)$ は連続とも積分可能とも限らないし，積分可能だったとしても $\int_a^x f(x)$ は $F(x)$ と一致するとも限らない．逆に，$\int_a^x f(t)dt$ は必ずしも微分可能ではなく，微分可能だったとしても $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$ とは限らない．

演習 26 ([1]). 以下の二つの積分計算には間違いが含まれている．間違いとその原因を指摘せよ．

(1)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -2.$$

(2)

$$\frac{d}{dx} \arctan \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2}.$$

これより

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2} dx = \left[\arctan \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right]_{-1}^1 = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.$$

[1] これが原始関数を $\int f(t)dt$ と書く理由である．

6.4 テイラーの定理・積分バージョン

定理 30 (テイラーの定理・積分バージョン). 関数 $f(x)$ が区間 I で $n-1$ 回微分可能，区間 I で n 回微分可能であれば，区間 I の任意の実数 a と b に対して

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}dt$$

が成り立つ.

証明のポイント. 部分積分を繰り返し用いて

$$\begin{aligned}
f(b) - f(a) &= \int_a^b f'(t)dt \\
&= [-(b-t)f'(t)]_a^b + \int_a^b (b-t)f''(t)dt \\
&= f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-t)f''(t)dt \\
&= f'(a)(b-a) - \left[\frac{(b-t)^2}{2}f''(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2}f'''(t)dt \\
&= \cdots \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}dt.
\end{aligned}$$

命題 8 ([1]). 区間 $[a,b]$ において $f(x)$ が連続，$g(x)$ は積分可能で一定の符号を有するとする. このとき $a < \xi < b$ なる点 ξ が存在して

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

が成り立つ.

証明のポイント. 区間 $[a,b]$ において $g(x) \geq 0$ とする. すると f の最小値 m と最大値 M に対して

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

ここで $f(x)$ が定数関数でない場合は

$$m\int_a^b g(x)dx < \int_a^b f(x)g(x)dx < M\int_a^b g(x)dx.$$

ここで $\int_a^b f(x)g(x)dx = c\int_a^b g(x)dx$ とおけば，$m < c < M$. したがって中間値の定理より $a < \xi < b$ となる ξ が存在して $f(\xi) = c$. 従って主張が成り立つ.

上の命題を用いると，定理 22 と定理 30 の剰余項が等しいことを（$f(x)$ のテイラー展開を用いずに）示すことができる. すなわち

$$\int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}dt = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n.$$

演習 27 (log(1 + x) の展開).

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n,$$
$$R_n = \int_0^x \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(n-1)!(1+t)^n}(x-t)^{n-1}dt$$
$$= \int_0^x \frac{(-1)^{n-1}(x-t)^{n-1}}{(1+t)^n}dt$$

(1) $|x| < 1$ のとき $R_n \to 0$, $(n \to \infty)$ を示せ．すなわち $|x| < 1$ の範囲で

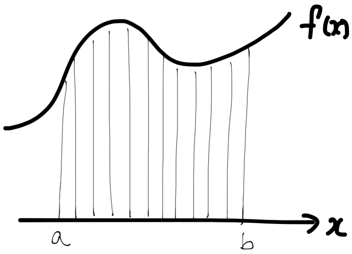
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

(2) $x = 1$ のときも $R_n \to 0$, $(n \to \infty)$ となることを示せ．すなわち

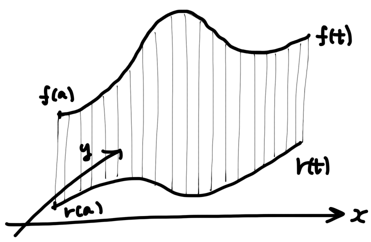
$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

6.5 曲線の長さ

ここまでは 1 変数関数のグラフ $f(x)$ の面積を計算したが，一般には平面の曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ 上で定義された関数 $f(t)$ のグラフの面積を計算することもできる．



一変数関数

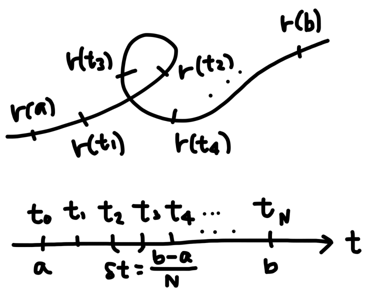


曲線上の関数

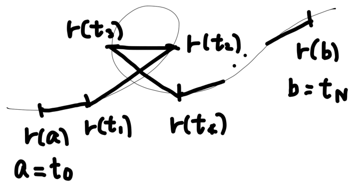
特に関数 $f(t) = 1$ のときは「曲線の長さ」が求まり，一般には「曲線上で定義される量の総和」が求まる．ここでは曲線の長さを見ていこう．

平面 $\mathbb{R}^2$ 内で，時間 t のときに点 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ を通るような曲線を考える．ここで座標関数 $x(t), y(t)$ は t に関して微分可能とする．時間 $t = a$ から $t = b$ の間の曲線の長さを求める．次のステップで行う．

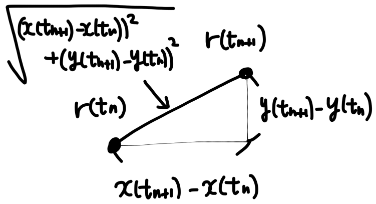
1. 時間 $[a, b]$ を N 分割する．分割された時間の長さ $\delta t = \frac{b-a}{N}$.



2. 道を線分で近似する．



3. 線分の長さを足し上げる．



$$\text{線分の長さの和} = \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{(x(t_{n+1}) - x(t_n))^2 + (y(t_{n+1}) - y(t_n))^2} \tag{7}$$

4. 分割を細かくする（N を大きくする）．

$$\text{曲線の長さ} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{(x(t_{n+1}) - x(t_n))^2 + (y(t_{n+1}) - y(t_n))^2} \tag{8}$$

ここで，$t_{n+1} = t_n + \delta t$ より

$$\lim_{\delta t\to 0} \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0} \frac{x(t_n + \delta t) - x(t_n)}{\delta t} = x'(t_n), \tag{9}$$

$$\lim_{\delta t\to 0} \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0} \frac{y(t_n + \delta t) - y(t_n)}{\delta t} = y'(t_n) \tag{10}$$

に注意すると

$$\text{曲線の長さ} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{(x(t_{n+1}) - x(t_n))^2 + (y(t_{n+1}) - y(t_n))^2} \tag{11}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{\left(\frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{\delta t}\right)^2 + \left(\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\delta t}\right)^2} \cdot \delta t \tag{12}$$

$$= \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \tag{13}$$

が得られる．

簡単のため $\boldsymbol{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ と置くと，

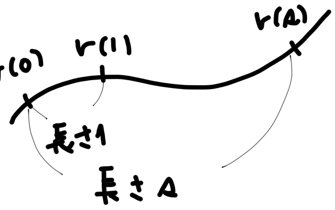
$$\text{曲線の長さ} = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)| dt \tag{14}$$

とも表すことができる．

ベクトル $\boldsymbol{r}'(t)$ を，曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ の（時間 t における）**速度ベクトル**と呼ぶ．ここで出てくる $|\boldsymbol{r}'(t)|dt$ は曲線上の $\boldsymbol{r}(t)$ と $\boldsymbol{r}(t + dt)$ の間の微小部分の長さである．この微小部分の長さは $|r'(t)|dt = ds$ と表され，**線素**と呼ばれる．線素を用いれば (14) はパラメータに依らない形で

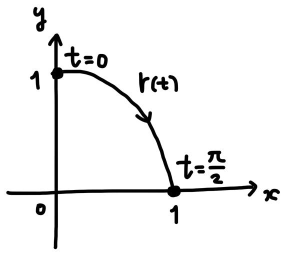
$$\text{曲線の長さ} = \int_L ds \tag{15}$$

と表すこともできる．(L は時間 $t=a$ から $t=b$ の間の曲線．）これは曲線上を時間 s で距離 s 進むようなパラメータ s を選ぶことと同じである（すなわち $|r'(s)|=1$）．



このようなパラメータを**<u>弧長パラメータ</u>**と呼ぶ．

例 6. 曲線 $\boldsymbol{r}(t)=(\sin t,\cos t)$, $0\le t\le \frac{\pi}{2}$, の長さは以下で求められる．



速度ベクトルの大きさは

$$|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1 \tag{16}$$

より，t は弧長パラメータである．したがって

$$\text{曲線の長さ}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt=\frac{\pi}{2}$$

となる．[2]

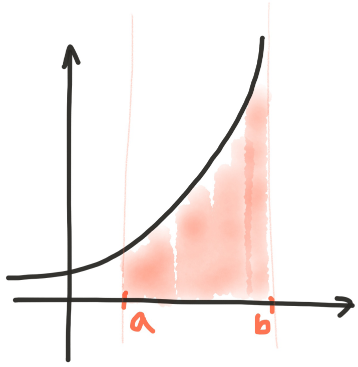
演習 28. 時間 t のときに点 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))$ を通るような曲線を考える．時間 $t=a$ から $t=b$ の間の曲線の長さが $\int_a^b|\boldsymbol{r}'(t)|dt$ となることを資料をなぞって（なぞらなくてもよいけど）説明せよ．

[2] 半径 1 の円周の長さ 2π の 4 分の 1 ですね．

6.6 広義積分

ここまでは有界な区間上で有界な関数に関して定積分を行ってきたが，被積分関数や積分区間が有界でない場合に積分を拡張する．このとき，積分関数の連続性と区間に関する加法性を保つように拡張するのが自然である（指導原理として拡張を試みる）．

簡単のため，被積分関数が有限個の点（特異点と呼ぶ）の近傍で有界でない場合を考える．



定義 24.

- $f(x)$ を区間 $[a,b)$ で連続な関数とする．$\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$ が収束するとき，$f(x)$ は<u>広義積分可能</u>といい，

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

と書く．$[a,b)$ 以外の区間についても同様．

- $f(x)$ を区間 $[a,b]$ の有限個の点 $a=p_0<p_1<\cdots<p_{m-1}<p_m=b$ を除いて連続な関数とする．各 $i=0,\ldots,m-1$ に対して

$$\int_{p_i}^{p_{i+1}} f(x)dx = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon'\to 0}}\int_{p_i+\epsilon}^{p_{i+1}-\epsilon'} f(x)dx$$

が収束するとき，

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{p_1} f(x)dx + \int_{p_1}^{p_2} f(x)dx + \int_{p_2}^{p_3} f(x)dx + \cdots + \int_{p_{m-1}}^{b} f(x)dx$$

と書く．

- ∞ や $-\infty$ を含む区間においても同様に広義積分が定義される．

不連続点が有限個の関数に限るならば，広義積分の場合も定積分の場合と同様に積分関数として原始関数が定義され，微分積分学の基本定理がなりたつ．

定理 31 (微分積分学の基本定理の拡張)**.** 区間 $[a,b]$ において有限個の点を除いて $f(x)$ が連続であるとする．また，$F(x)$ を区間 $[a,b]$ において有限個の点を除いて微分可能で，$F'(x)=f(x)$ であるとする．このとき $f(x)$ は 区間 $[a,b]$ で広義積分可能で

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

が成り立つ．

カントール関数（定義 21）のように，不連続点が無限個ある場合はルベーグ積分論の範囲になる．

演習 29 (コーシーの条件 [2])**.** 区間 $[a,b)$ で定義された関数 $f(x)$ が任意の $u \in [a,b)$ に対する部分閉区間 $[a,u]$ において積分可能であるとき，$f(x)$ が区間 $[a,b)$ で広義積分可能であることの必要十分条件は，

$$\forall \epsilon, \exists c \in [a,b),\ s.t.\ \left(c < v < u < b \Rightarrow \left| \int_v^u f(x)dx \right| < \epsilon \right)$$

となることである．これを示せ．

6.7　ガンマ関数とベータ関数

6.7.1　ガンマ関数

定義 25. 実数 $t>0$ に対して

$$\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx \tag{17}$$

をガンマ関数と呼ぶ．

定理 32 (ガンマ関数の基本性質)**.**　(1) $\Gamma(t)$ は $t>0$ で収束し，$\Gamma(t)>0$,

(2) $\Gamma(t+1)=t\Gamma(t), \quad (t>0)$

(3) $\Gamma(1)=1, \quad \Gamma(m)=(m-1)!, \quad (m=1,2,3,\dots)$

(4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

証明のポイント.

(1), (2) $1<t\le 2$ の場合は部分積分により

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx &= \left[-x^{t-1}e^{-x}\right]_0^\infty+(t-1)\int_0^\infty x^{t-2}e^{-x}dx\\ &=(t-1)\int_0^\infty x^{t-2}e^{-x}dx.\end{aligned}$$

すなわち

$$\Gamma(t)=(t-1)\Gamma(t-1).$$

よって $0<t\le 1$ の場合に帰着する．

$2<t\le 3$ の場合も同様の操作をして

$$\Gamma(t)=(t-1)(t-2)\Gamma(t-2).$$

よって $0<t\le 1$ の場合に帰着する．

上記の操作を繰り返すことで結局どんな実数 t の場合も $0<t\le 1$ の場合に帰着される．
$0<t\le 1$ の場合．積分区間を $0\le x\le 1$ と $1\le x$ に分けて考える．

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{t-1}e^{-x}dx &= \left[\frac{1}{t}x^te^{-x}\right]_0^1+\frac{1}{t}\int_0^1 x^te^{-x}dx\\ &=\frac{e^{-1}}{t}+\frac{1}{t}\int_0^1 x^te^{-x}dx\end{aligned}$$

となり右辺は定積分である．一方 $1\le x$ のときは $x^{t-1}\le 1$ より $\int_1^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$ は収束する．

(3) ここで m を自然数とすると帰納的に

$$\int_0^\infty x^me^{-1}dx=m(m-1)(m-2)\cdots 1=m!.$$

すなわち，ガンマ関数は上記左辺の m を実数に拡張した関数である（慣習上変数を 1 ずらして定義される）．

(4)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx &= 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt \quad (x=t^2)\\ &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

（$\int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は 2 重積分を使って示される．e.g. [4, 例題 5.2.3].）

6.7.2　ベータ関数

定義 26. 実数 $p>0, q>0$ に対して

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{18}$$

をベータ関数と呼ぶ．

定理 33 (ベータ関数の基本性質)**.**

- $B(p,q)$ は $p>0, q>0$ で収束し，$B(p,q)>0$.
- $B(p,q)=B(q,p)$
- $B(p,q+1)=\frac{q}{p}B(p+1,q)$
- $B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta, \quad (p,q>0)$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^a\theta\cos^b\theta d\theta=\frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right), \quad (a,b>-1)$

定理 34.

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

演習 30 ([2])**.** (1) 定理 *32, 33* を参考に $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta (n\in\mathbb{N})$ をガンマ関数を用いて表し，その値を求めよ．

(2) $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ をガンマ関数を用いて表し，その値を求めよ．

例題 15. 次の積分をガンマ関数を用いて表せ．

(1) $\int_0^\infty e^{-x^3}dx$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^a\theta d\theta \quad (a>-1)$

(4) $\int_0^\infty e^{-x^n}dx, (n\in\mathbb{N})$

参考文献

[1] 高木貞治, 解析概論, 岩波書店

[2] 杉浦 光夫, 解析入門, 東京大学出版会

[3] 小林昭七, 微分積分読本, 裳華房

[4] 三宅 敏恒, 入門微分積分, 培風館

[5] 数学教科書・講義ノートを集めたサイト：
`http://language-and-engineering.hatenablog.jp/archive/category/数学`