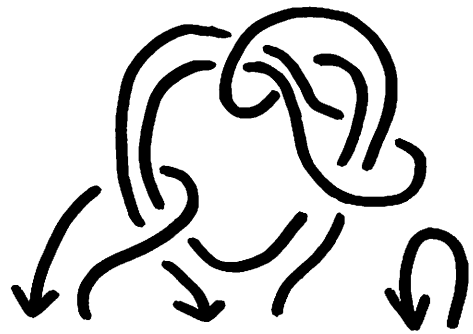
リボン底タングルの普遍$\mathfrak{sl}_2$不変量について

京都大学理学研究科

鈴木咲衣



今日やること

0. 底タングル

1. 研究の目的，主定理

2. 主定理の詳しい説明

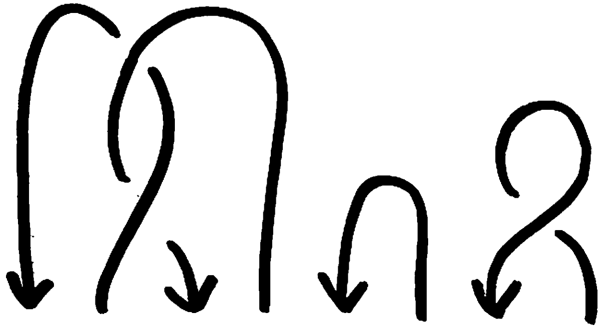
3. 証明のあらすじ

4. 応用 と 例

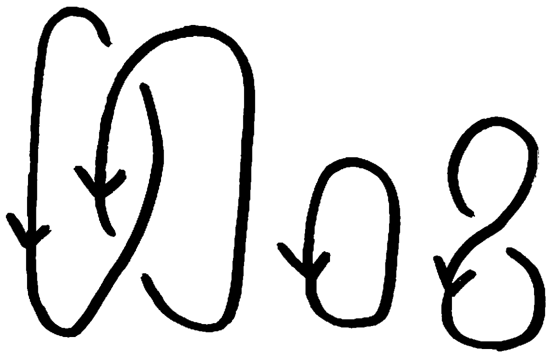
底タングル

- arcのみから成るタングル in $[0,1]^3$.
- 境界は底に一列に並んでいる.
- 連結成分の境界は隣合い,
  右から出て左へ入る.

$T =$



$cl(T) =$



研究の目的：底タングルの普遍sl_2不変量を'よく知りたい'.

普遍sl_2不変量 (Lawrence, Ohtsuki)

絡み目 ← 底タングルT

タングル

$J_T \in U_h^{\hat{\otimes} n}$ ⟹ 色つきJones多項式

$J(L; W_1, \dots, W_n) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$

※ $U_h := U_h(sl_2)$　　$W_1, \dots, W_n$：有限次元表現

- 他の不変量との関連性.
- 絡み目のtopologicalな性質との関連性.

主定理

$U_h(sl_2)$ ： リー環 sl_2 の量子展開環

$Q_0^{(n)} \subset U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$ ： 部分代数

$\forall T$ ： n 成分リボン底タングル

J_T ： T の普遍 sl_2 不変量

$$\Rightarrow J_T \in \hat{Q}_0^{(n)}$$

• リボン底タングル

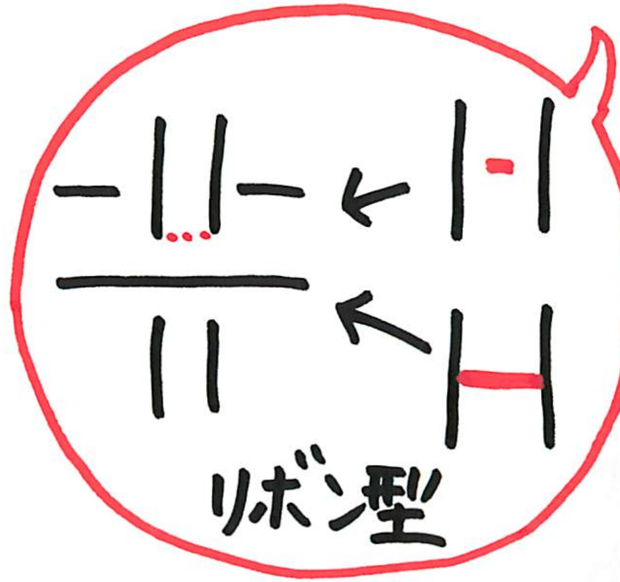
$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 閉じるとリボン絡み目になる底タングル

• n成分リボン絡み目

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 'リボン型'の自己交差のみを許すはめ込み

$$D_1 \cup \cdots \cup D_n \looparrowright S^3$$

の像の境界となる絡み目



・量子展開環 $U_h := U_h(sl_2)$ over $\mathbb{Q}[[h]]$

生成元 ： $H, E, F.$

関係式 ： $HE-EH=2E,\ HF-FH=-2F,$

$$EF-FE=\frac{K-K^{-1}}{v-v^{-1}}$$

ただし $v=\exp\frac{h}{2},\ K=\exp\frac{hH}{2}.$

※ $U_h=(U_h,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon,S,R,\nu)$ は

リボンホップ代数とみなせる. $\hat{U}_h^{\hat{\otimes}2}$ $\hat{U}_h$

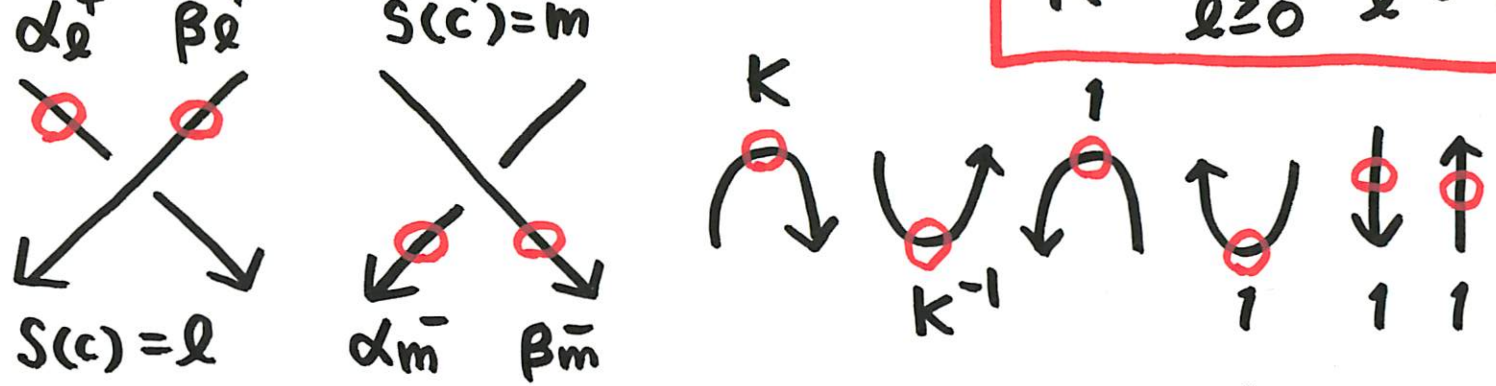
• 普遍 sl_2 不変量 J_T

$T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$: 底タングル

1. 状態 s : {crossings} $\longrightarrow$ {0, 1, 2, …} に対して

次のようにひもにラベルをつける。

$$\boxed{R^{\pm 1} = \sum_{\ell \geq 0} \alpha_\ell^{\pm} \otimes \beta_\ell^{\pm}}$$

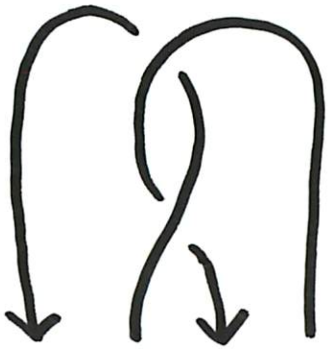


2. 各ひもごとにラベルを読み、順にテンソル積をとる $=: J_{T,s}$

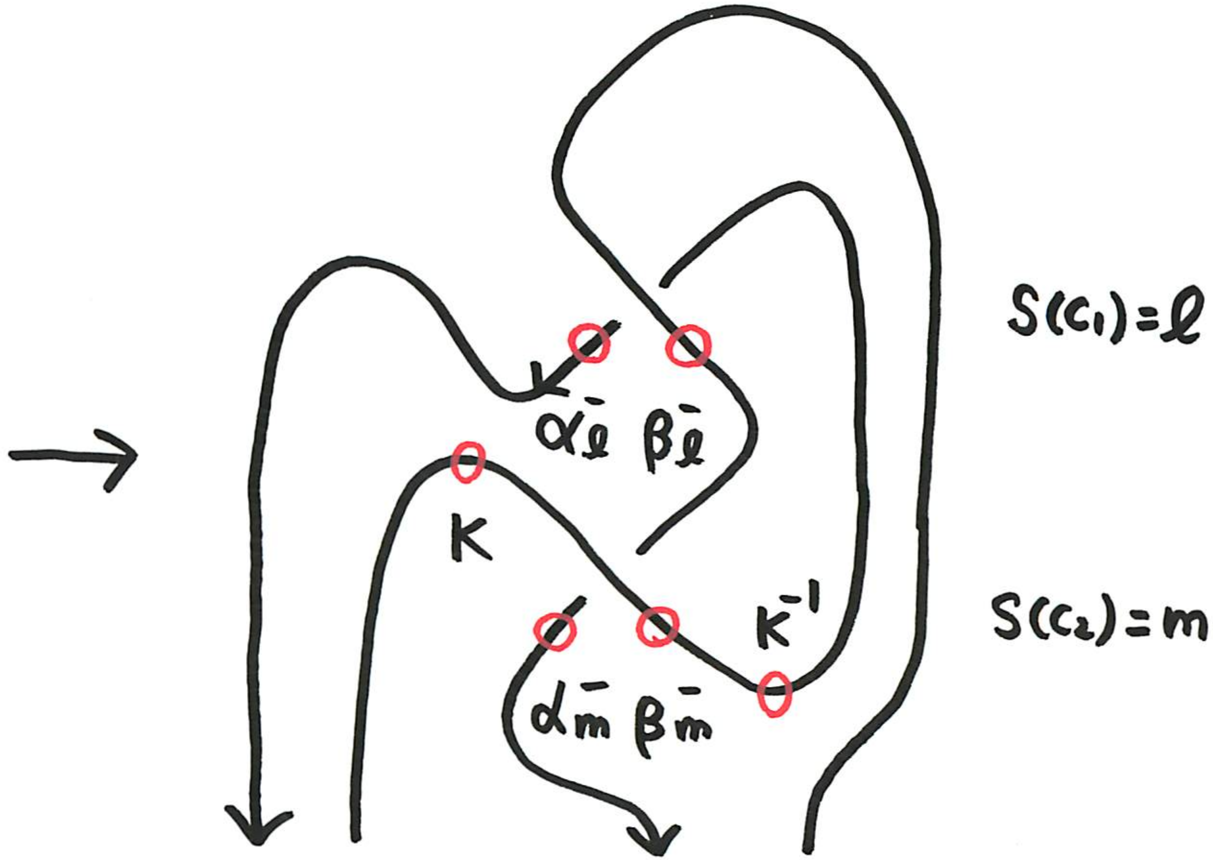
3. $J_T = \sum_s J_{T,s}$ とおく。

⇒ 例で説明

〈例〉



$T = T_1 \cup T_2$



$$J_{T,S} = \alpha_{\bar{\ell}} K^{-1} \beta_{\bar{m}} K \otimes \alpha_{\bar{m}} \beta_{\bar{\ell}} \in U_h^{\hat{\otimes} 2}$$

$$J_T = \sum_{\ell, m \geq 0} \alpha_{\bar{\ell}} K^{-1} \beta_{\bar{m}} K \otimes \alpha_{\bar{m}} \beta_{\bar{\ell}}$$

Fact (Habiro)

$\forall T$: n成分リボン底タングル

$\exists W$: $2k$成分 even-trivial 底タングル

$$\boxed{J_T = \mu^{[N_1, \cdots, N_n]} (\mathrm{ad})^{\otimes k} (J_W)}$$

※ $\mathrm{ad}: U_h \hat{\otimes} U_h \to U_h$

$$x \otimes y \longmapsto \sum x' y S(x''), \quad \Delta(x) = \sum x' \otimes x''$$

$$\mu^{[N_1, \cdots, N_n]}: U_h^{\hat{\otimes} k} \to U_h^{\hat{\otimes} n}, \quad N_1 + \cdots + N_n = k$$

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \longmapsto x_1 \cdots x_{N_1} \otimes \cdots \otimes x_{k-N_n+1} \cdots x_k$$

$ad^{\otimes k}(J_{W,s}) \in Q_0^{(k)}$ 証明のあらすじ

① W: $2k$ 成分, even-trivial

$\Rightarrow J_{W,s} \in D^{M(W)}(Q^{d_1} \otimes Q_{b_1} \otimes \cdots \otimes Q^{d_k} \otimes Q_{b_k})$

- $D^{M(W)} \in U_h^{\hat{\otimes} 2k}$; Wの絡み行列$M(W)$と$D = v^{\frac{H \otimes H}{2}}$から定まる元.
- $\sum_i d_i \geq \sum_i b_i \quad ({}^\forall d_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, {}^\forall b_i \in \mathbb{Z})$

② $\boxed{\underline{\text{Lemma}} \quad ad(Q^d \otimes Q_b) \subset Q_{b-d} \quad d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, b \in \mathbb{Z}}$

$\Rightarrow ad^{\otimes k}(J_{W,s}) \in Q_{b_1-d_1} \otimes \cdots \otimes Q_{b_k-d_k}$

①, Lemma, $+\alpha$

$\subset Q^{(k)}_{\Sigma b_i - d_i} \subset Q_0^{(k)} \quad \square$

Def　　①

Filtrations

① $U_{\mathbb{Z},q} = Q^0 \supset Q^1 \supset Q^2 \supset \cdots$ 減少 filtration

$Q^1 := \langle \tilde{E}^{(2i+1)}, \tilde{F}^{(2i+1)} \mid i \geq 0 \rangle_{\text{ideal}}$ in $U_{\mathbb{Z},q}$

② $\bar{U}_q^{ev} = Q_2 \supset Q_1 \supset Q_0 \supset Q_{-1} \supset \cdots$ 増加 filtration

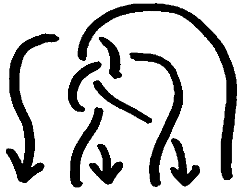
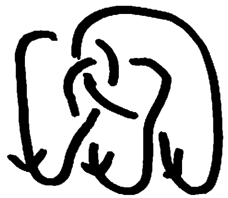
$$Q_b := \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}\left\{ (q+1)^{i_0} f^{i_1} K^{2i_2} e^{i_3} \;\middle|\; \begin{array}{l} \delta_{i_1} + \delta_{i_3} - 2i_0 \leq b \\ i_1, i_3 \geq 0,\ i_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

ただし $\delta_i := \begin{cases} 0 & i : \text{even} \\ 1 & i : \text{odd} \end{cases}$

②' $Q_b^{(k)} := \sum_{\substack{b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{Z}_{\leq 2} \\ b_1 + \cdots + b_k = b}} Q_{b_1} \otimes \cdots \otimes Q_{b_k} \subset (\bar{U}_q^{ev})^{\otimes k}$

$(k \geq 1)$

〈例〉ボロミアンタングル

$B =$  $\quad L_B =$ 

$$J_B = \sum_{\substack{m_i, n_i \geq 0 \\ 1 \leq i \leq 3}} (-1)^{n_1+n_2+n_3} q^{m_3+n_3 \sum_{i=1}^{3}\left(-\frac{1}{2}m_i(m_i+1) - n_i + m_i m_{i+1} - 2m_i n_i\right)}$$

$$\tilde{F}^{(n_3)} e^{m_1} \tilde{F}^{(m_3)} e^{n_1} K^{-2m_2} \otimes \tilde{F}^{(n_1)} e^{m_2} \tilde{F}^{(m_1)} e^{n_2} K^{-2m_3} \otimes \tilde{F}^{(n_2)} e^{m_3} \tilde{F}^{(m_2)} e^{n_3} K^{-2m_1}$$

$$\notin \hat{Q}_0^{(3)}$$

$$V(L_B) = (v+v^{-1})^3 - (v-v^{-1})^4 (v+v^{-1})(v^2+1+v^{-2})$$

$$\notin (v+v^{-1})^3 \mathbb{Z}[v, v^{-1}],$$

$$J(L_B; P_1, P_1, P_1) = -(v-v^{-1})^4 (v+v^{-1})(v^2+1+v^{-2})$$

$$\notin (v-v^{-1})^8 (v+v^{-1})^3 (v^2+1+v^{-2}) \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$$