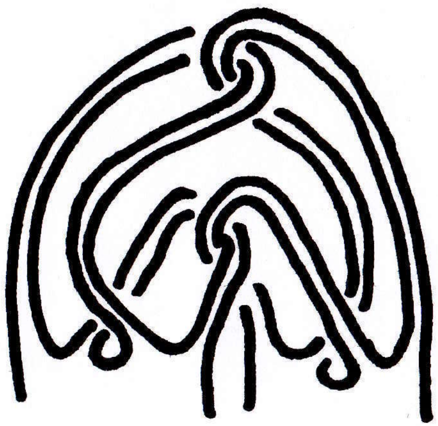
# 境界底タングルの普遍$\mathfrak{sl}_2$不変量について

京都大学数理解析研究所

鈴木咲衣



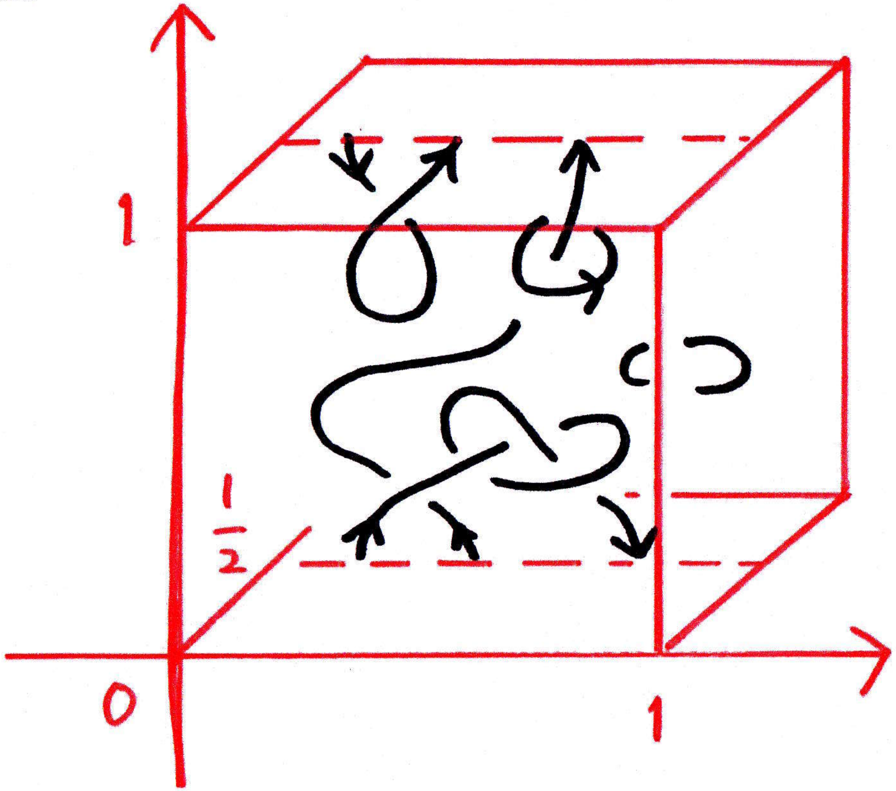
# 今日の話

1. タングル, 底タングル, 境界底タングル
2. 研究の目的
3. 普遍 $sl_2$ 不変量
4. 主結果と応用
5. 証明のあらすじ

## ・タングル in a cube

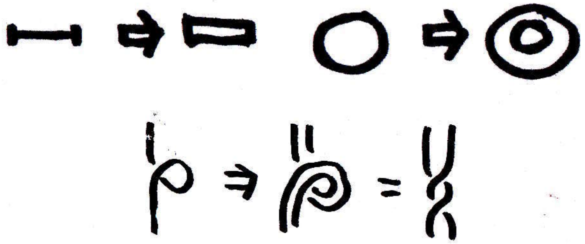
例)

$\coprod^{3}[0.1]\coprod^{2}S^{1}\overset{}{\underset{\text{emb}}{\hookrightarrow}}$




・向き付き

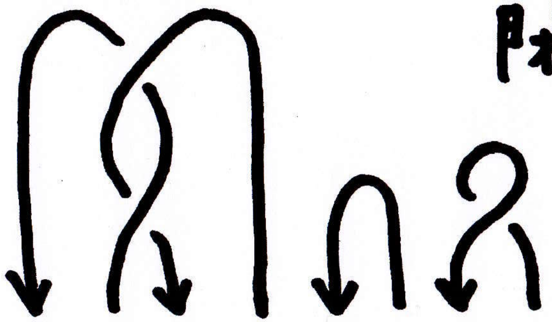
・フレーミング付き



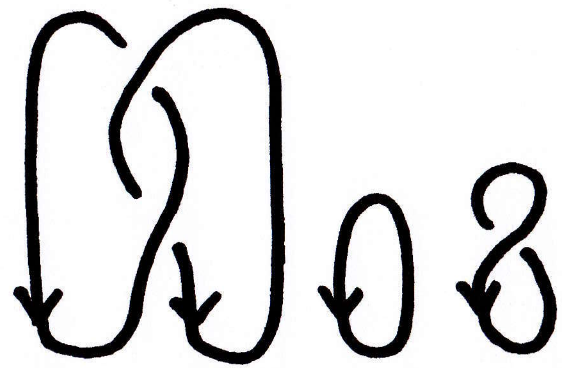
・境界 $\in [0.1]\times\{\frac{1}{2}\}\times\{0.1\}$

## 底タングル in a cube $[0.1]^{\times 3}$

- 弧のみから成るタングル
- 境界は底に一列に並んでいる
- 連結成分の境界は隣合い,
右から出て左へ入る

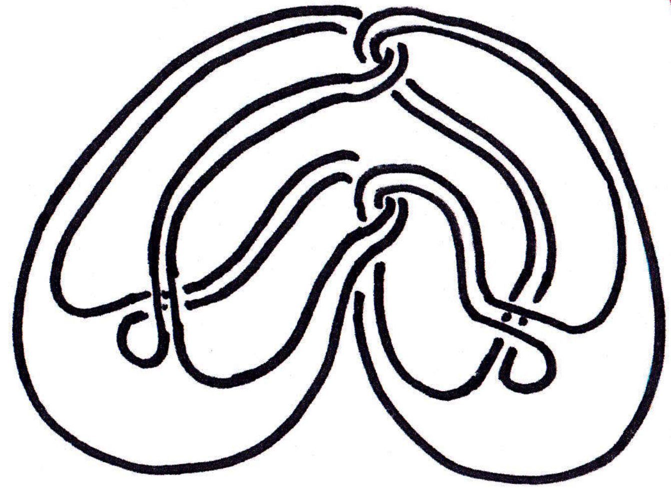


閉じる



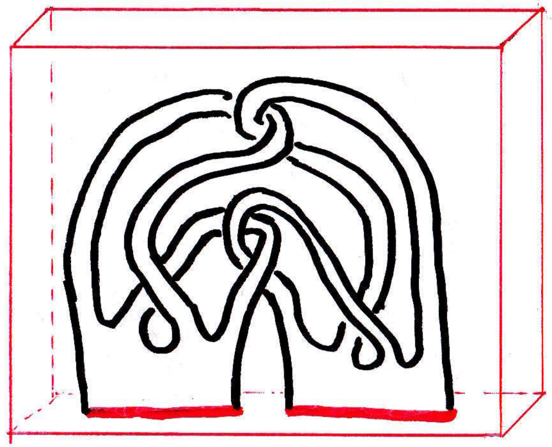
## 境界絡み目 $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 各 $L_i$ が互いに交わりを持たない
Seifert曲面を張る絡み目



## 境界底タングル $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 各 $\overline{T_i}$ が互いに交わりを持たない
Seifert曲面 in $[0,1]^3$
を張る底タングル



※ $\overline{T_i}$ : $T_i$ を底の直線で閉じた結び目

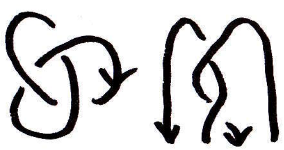
# 研究の目的：底タングルの普遍 $sl_2$ 不変量の性質の解明

普遍 $sl_2$ 不変量 (Laurence, Ohtsuki)

$$\boxed{\text{底タングル } T \quad J_T \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}} \xrightarrow[\mathrm{tr}_q^{V_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{tr}_q^{V_n}]{\text{量子トレース}} \boxed{\text{色つきJones多項式} \quad J(cl(T); V_1,\cdots,V_n)}$$

※ $V_1,\cdots,V_n$ : $U_h(sl_2)$ の有限次元表現

幾何学的性質



$\Longleftrightarrow$ ?

代数的性質

$J_T,\ J(L; V_1,\cdots,V_n)$

## ・量子展開環 $U_h(sl_2)$ / $\mathbb{Q}[[h]]$

生成元：$H, E, F$

関係式：$HE - EH = 2E$, $HF - FH = -2F$

$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$$

ただし $q = \exp h$, $K = \exp \frac{hH}{2}$

$\Rightarrow$ $U_h(sl_2)$ はリボンホップ代数構造を持つ.

# リボンホップ代数 $/\Bbbk$ $U = (U, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, R, \theta)$

**• ホップ代数**

$\mu : U \otimes U \to U$

$\eta : \Bbbk \to U$

$\Delta : U \to U \otimes U$

$\varepsilon : U \to \Bbbk$

$S : U \to U$

**with**

**• $R \in U \otimes U$ : invertible**

$R\Delta(x)R^{-1} = \Delta^{op}(x) \quad {}^\forall x \in U$

$(1 \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12}$

$(\Delta \otimes 1)R = R_{13}R_{23}$

**• $\theta \in U$ : central, invertible**

$\Delta(\theta) = (\theta \otimes \theta)(R_{21}R)^{-1}$

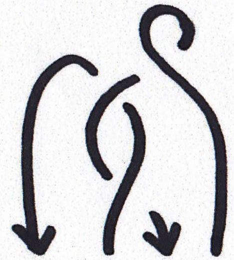
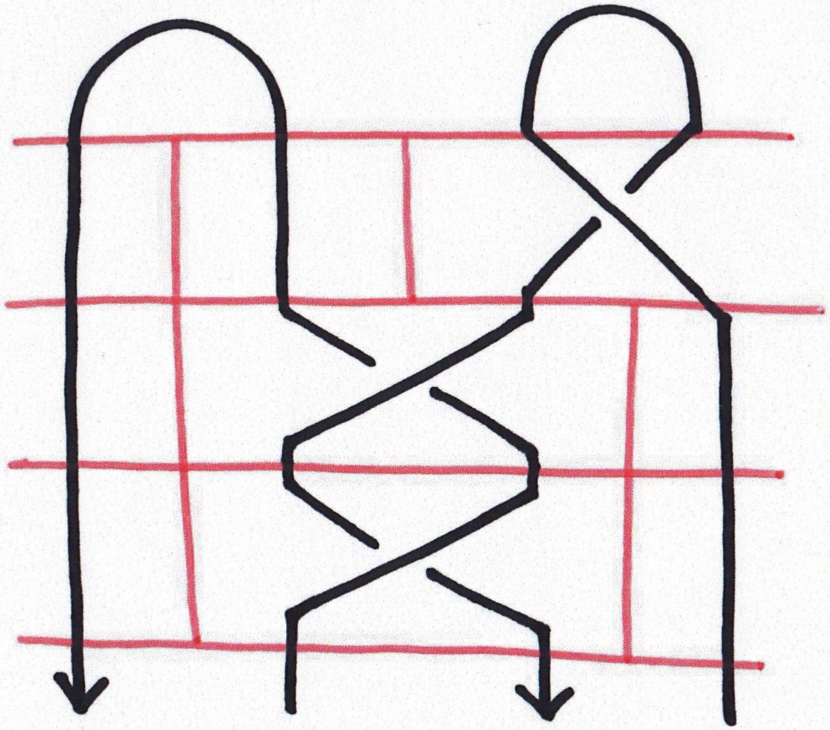
$S(\theta) = \theta, \ \varepsilon(\theta) = 1$

## 普遍$sl_2$不変量 $J_T$

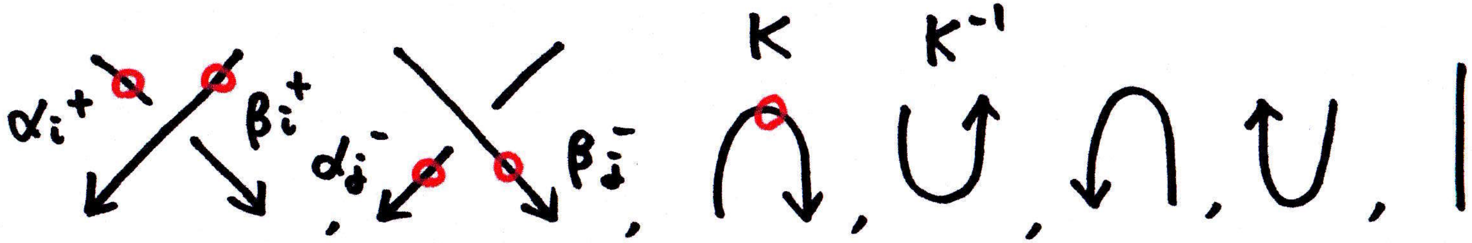
, $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ : 底タングル

**Step1** $T$を $\times$, $\times$, $\cap$, $\cup$, $|$ から成る図式で表す.

〈例〉

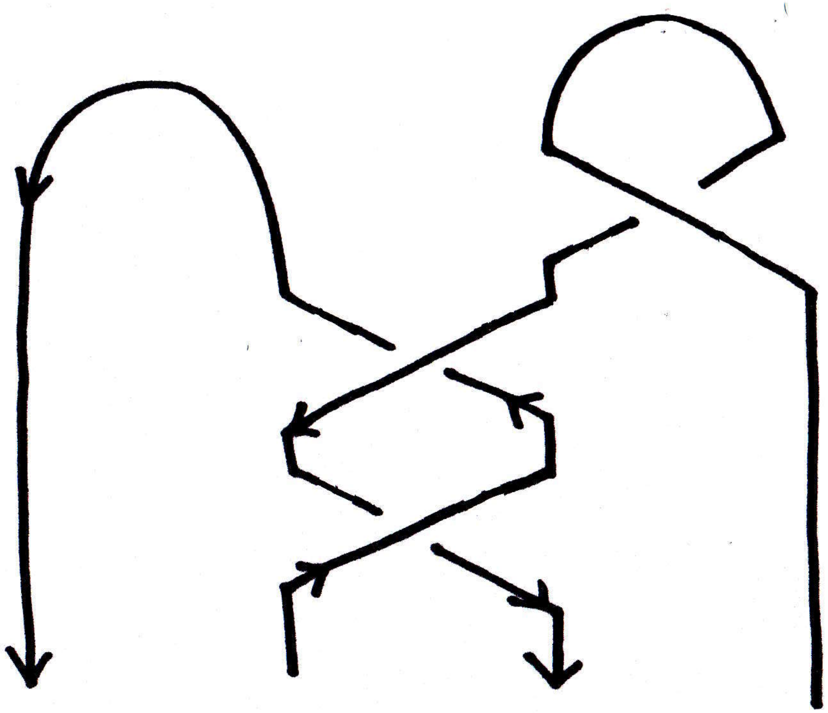
$T =$  $\rightsquigarrow$ 

## Step2 各部分にラベルをつける. $\left(R^{\pm1} = \sum_i \alpha_i^{\pm} \otimes \beta_i^{\pm}\right)$



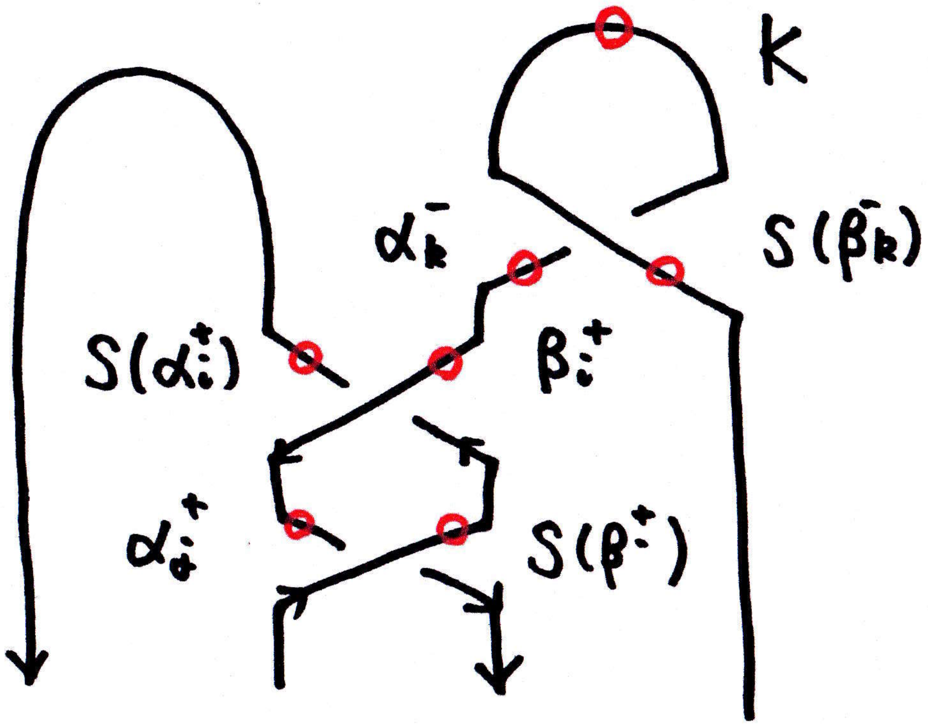

(ただし上向きのときS)

〈例〉



Step3 ひもを逆向きにたどりながらラベルを読み，順にテンソル積をとり，添え字について和をとる．

〈例〉




$J_T =$

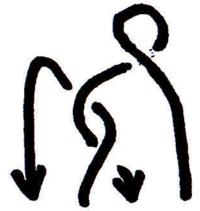
## キゴウ

- $[i]_q = \dfrac{q^i - 1}{q - 1}$, $[i]_q! = [i]_q [i-1]_q \cdots [1]_q$,
- $e = (q^{1/2} - q^{-1/2})E$, $\tilde{F}^{(i)} = \dfrac{F^i K^i}{[i]_q!}$, $(i \geq 0)$
- $D = q^{\frac{1}{4} H \otimes H} = \exp\left(\dfrac{h}{4} H \otimes H\right)$

## 普遍R-行列

$$R = D\left(\sum_{n \geq 0} q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \tilde{F}^{(n)} K^{-n} \otimes e^n\right)$$

$$R^{-1} = D^{-1}\left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \tilde{F}^{(n)} \otimes K^{-n} e^n\right)$$

$J\big($  $\big)$

$$= \sum_{m,n,\ell \geq 0} (-1)^{m+n} q^{-\frac{1}{2}\ell(\ell-1) - n^2 + 2mn - 3n\ell - 2m\ell} \begin{bmatrix} n+\ell \\ n \end{bmatrix}_q$$

$$D^{-2}\left(1 \otimes q^{\frac{1}{4}H(H+2)}\right)\left(\tilde{F}^{(m)} K^{-2n} e^{n} \otimes \tilde{F}^{(n+\ell)} K^{2(n-m)} e^{\ell+m}\right)$$

$$\left( \text{ただし } \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_q = \frac{[i]_q [i-1]_q \cdots [i-j+1]_q}{[j]_q!} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \quad \text{for } i \in \mathbb{Z},\ j \geq 0 \right)$$

- $f = (q-1)FK \quad \left( = (q-1)\tilde{F}^{(1)} \right)$
- $\bar{U}_q^{ev}$ : $f, e, K^{\pm 2}$ で生成される $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-部分代数 in $U_h(sl_2)$

**定理**

$T$ : $n$ 成分境界底タングル

$\Rightarrow J_T \in \left\{ (\bar{U}_q^{ev})^{\otimes n} \right\}^{\wedge}$

注) $f^i = q^{-\frac{1}{2}i(i-1)} (q^i - 1)(q^{i-1} - 1) \cdots (q-1) \tilde{F}^{(i)}$

## 4. Main theorems & applications

$$J_T = \sum_{a,M,N,n,k,p_1,p_2,s_1,s_2,z,x,S,\tilde{S}} q^{\left\{p_1^2+p_1(x-k-s_1)+p_2^2+p_2(z-n-s_2)+s_1^2+s_1(N-S-n-x)+s_2^2+s_2(M-\tilde{S}-k-z)+\frac{1}{2}S(S+1) +S(k+x-N-2a)+\frac{1}{2}\tilde{S}(\tilde{S}+1)+\tilde{S}(n+z+M-2N-2a)-k^2+k(6n+2a+M-4N)-n^2+n(M-3N-2a) +\frac{1}{2}N(N+1)+2N^2+N(2a-2z-1)+\frac{1}{2}M(M+1)+M(2a-2x)+x^2+z^2-(x+z)a+\frac{1}{2}a(a-1)\right\}}$$

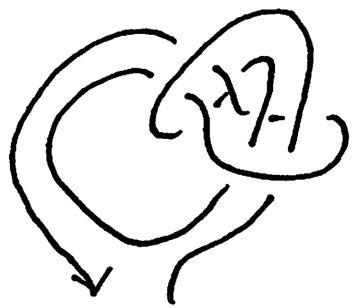
$$\begin{bmatrix} k \\ p_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} p_1 \\ s_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} N+2n-2M-p_1+s_1-1 \\ n-p_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} N-p_1 \\ M-x-p_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} M-x-p_1 \\ S-s_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} 2M-x+2n+S+s_1-1 \\ x-k+p_1 \end{bmatrix}_q$$
$$\begin{bmatrix} n \\ p_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} p_2 \\ s_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} M+2k-2N-p_2+s_2-1 \\ k-p_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} M-p_2 \\ N-z-p_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} N-z-p_2 \\ \tilde{S}-s_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} 2N-z+2k+\tilde{S}+s_2+1 \\ z-n+p_2 \end{bmatrix}_q$$
$$\begin{bmatrix} N-M+x \\ x-z-a \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} z \\ x-z-a \end{bmatrix}_q \{x+z-a\}_q! \quad f^a K^{-2(M+N-n-k-S-\tilde{S})}\{H+z-N+M+3x-2a\}_{q,a-z-x}e^a.$$

ただし,

$$\{i\}_q = q^i - 1, \quad \{m\}_q! = \{m\}_q\{m-1\}_q \cdots \{1\}_q,$$
$$\{H+i\}_{q,m} = \{H+i\}_q\{H+i-1\}_q \cdots \{H+i-m+1\}_q,$$
$$\{H+j\}_q = q^{H+j} - 1 = q^j K^2 - 1,$$

$i, j \in \mathbb{Z}, m \geq 0.$

T =



## 応用定理

L: $n$成分境界絡み目, $\ell_1, \ldots, \ell_n \geq 0$

$$\Rightarrow J(L; \tilde{P}'_{\ell_1}, \ldots, \tilde{P}'_{\ell_n}) \in \frac{\{2\ell_j+1\}_{q,\ell_j+1}}{\{1\}_q} I_{\ell_1} \cdots \hat{I}_{\ell_j} \cdots I_{\ell_n}$$

$$\tilde{P}'_\ell = \frac{q^{\frac{1}{2}\ell}}{\{\ell\}_q!} \prod_{i=0}^{\ell-1} (V_2 - q^{i+\frac{1}{2}} - q^{-i-\frac{1}{2}}),$$ $V_2$: 2次元既約表現

$$I_\ell = \langle \{\ell-k\}_q! \, \{k\}_q! \mid 0 \leq k \leq \ell \rangle \text{ ideal in } \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$$

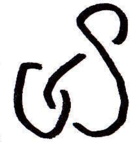
$$\left( \{i\}_q = q^i - 1, \quad \{i\}_{q,p} = \{i\}_q \{i-1\}_q \cdots \{i-p+1\}_q, \quad \{i\}_q! = \{i\}_{q,i} \right)$$

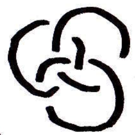
## 〈例〉L：n成分境界絡み目

$$J(L;\tilde{P}'_1,\dots,\tilde{P}'_1) \in (q-1)^n(q+1)\ (q^2+q+1)\ \mathbb{Z}[q,q^{-1}]$$

$$J(L;\tilde{P}'_2,\dots,\tilde{P}'_2) \in (q-1)^{2n}(q+1)\ (q^2+q+1)(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$$

$$J(L;\tilde{P}'_3,\dots,\tilde{P}'_3) \in (q-1)^{3n}(q+1)^{n+1}(q^2+q+1)(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$$
$$(q^2-q+1)(q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)\ \mathbb{Z}[q,q^{-1}]$$

$J($$;\check{P}'_1,\tilde{P}'_1) = q^{\frac{1}{4}}(q-1)^{-2}(q+1)(q^{1/2}-1)^2(q+q^{\frac{1}{2}}+1)$

$J($$;\tilde{P}'_1,\tilde{P}'_1,\tilde{P}'_1) = -q^{-2}\ (q-1)(q+1)(q^2+q+1)$

## これから

- 普遍な不変量への拡張

- 3次元多様体の量子不変量への応用

- Milnor不変量と量子不変量の関係

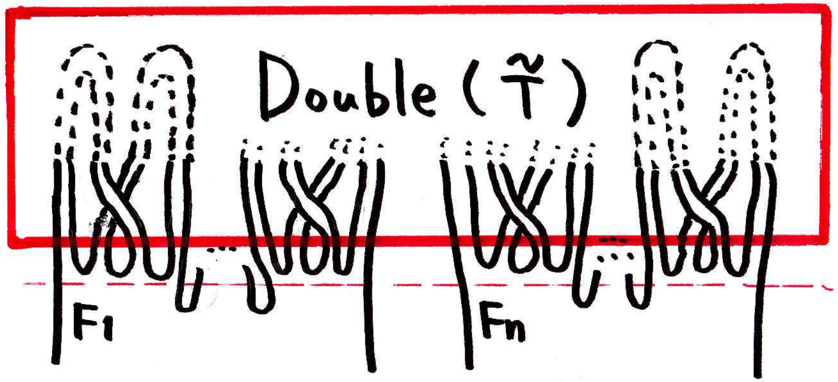
# 証明のあらすじ

$^{\exists}\tilde{T} = \tilde{T}_1 \cup \cdots \cup \tilde{T}_{2(g_1+\cdots+g_n)}$

$T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$：境界底タングル

$F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$

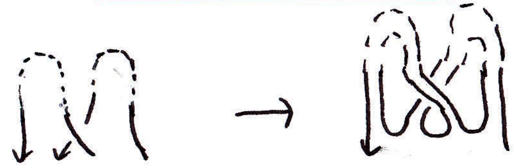
$F_i$：$T_i$ の Seifert 曲面, $g(F_i) = g_i$

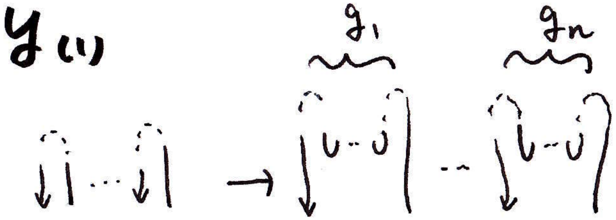
$F =$ 


(Habiro, S)

$$\Rightarrow \quad J_T = \mu^{[g_1,\cdots,g_n]}\, \bar{Y}^{\otimes g_1+\cdots+g_n}(J_{\tilde{T}})$$

$$\begin{cases} \bar{Y} : U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} 2} \to U_h(sl_2) \\ \quad \sum x \otimes y \mapsto \sum x_{(1)} S^{-1}(y_{(2)}) K^2 S(x_{(2)})\, y_{(1)} \\ \mu^{[g_1,\cdots,g_n]} : U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} g_1+\cdots+g_n} \to U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n} \\ \quad \sum x_1 \otimes \cdots \otimes x_{g_1+\cdots+g_n} \mapsto \sum x_1 \cdots x_{g_1} \otimes x_{g_1+1} \cdots x_{g_1+g_2} \otimes \cdots \otimes \cdots x_{g_1+\cdots+g_n} \end{cases}$$





$\boxed{\text{示すこと：} \mathcal{U}^{[g_1,\cdots,g_n]}\,\bar{Y}^{\otimes g_1+\cdots+g_n}(J_{\tilde{T}}) \in \{(\bar{U}_q^{ev})^{\otimes n}\}^{\wedge}}$

**定義** $\triangleright,\ \triangleleft,\ \dot{Y} : U_h(sl_2)^{\hat{\otimes}2} \to U_h(sl_2)$

- $x \triangleright y = \sum x_{(1)}\, y\, S(x_{(2)})$
- $x \triangleleft y = \sum S^{-1}(y_{(2)})\, x\, y_{(1)}$
- $\dot{Y}(x \otimes y) = \sum x_{(1)}\, S^{-1}(y_{(2)})\, S(x_{(2)})\, y_{(1)}$

**補題1** $\bar{Y}(x \otimes y) = \sum \dot{Y}(x_{(1)} \otimes y_{(2)})\big((x_{(2)} \triangleright K^2) \triangleleft y_{(1)}\big)$

## $U_h(sl_2)$ の $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-部分代数

| | |
|---|---|
| $U_{\mathbb{Z},q}$ | $K^{\pm1},\ \tilde{E}^{(i)},\ \tilde{F}^{(i)},\ i \geq 1$ |
| $\bar{U}_q$ | $K^{\pm1},\ e,\ f$ |
| $X^{ev}$ | $K^{\pm1} \to K^{\pm2}$ |

$$\tilde{E}^{(i)} = \frac{(q^{-\frac{1}{2}}E)^i}{[i]_q!}$$

$$\tilde{F}^{(i)} = \frac{F^iK^i}{[i]_q!}$$

$$e = (q-1)\tilde{E}^{(1)}$$

$$f = (q-1)\tilde{F}^{(1)}$$

## 補題2

- $U_{\mathbb{Z},q} \triangleright \bar{U}_q^{ev} \subset \bar{U}_q^{ev}$, $\quad \bar{U}_q^{ev} \triangleleft U_{\mathbb{Z},q} \subset \bar{U}_q^{ev}$
- $\dot{Y}(U_{\mathbb{Z},q} \otimes \bar{U}_q) \subset \bar{U}_q^{ev}$, $\dot{Y}(\bar{U}_q \otimes U_{\mathbb{Z},q}) \subset \bar{U}_q^{ev}$
- $\sum \dot{Y}(D' \otimes U_{\mathbb{Z},q}) \otimes \dot{Y}(D'' \otimes \bar{U}_q) \subset (\bar{U}_q^{ev})^{\otimes 2}$ etc...

$(D = \sum D' \otimes D'')$

〈おさらい〉

$$\bar{Y}^{\otimes g_1+\cdots+g_n}(J\tilde{T})$$

$R^{\pm1}$ と $K^{\pm1}$ からできている。

$$R = D\sum_{n\geq 0} q^{\frac{1}{2}n(n-1)}\tilde{F}^{(n)}K^{-n}\otimes e^n$$

$$R^{-1} = D^{-1}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\tilde{F}^{(n)}\otimes K^{-n}e^n$$

$$= \sum_{i,\cdots}\bar{Y}^{\otimes g_1+\cdots+g_n}\Big(\cdots D'\underbrace{\tilde{F}^{(i)}K^{-i}}_{\in\, U_{\mathbb{Z}q}}\cdots \otimes \cdots D''\underbrace{e^i}_{\in\, \bar{U}_q}\cdots\otimes\cdots\otimes\cdots\cdots\Big)$$

⇒ 補題2はそのままでは使えない。

## 補題3

- $\dot{Y}(xy\otimes z) = \sum (x_{(1)} \triangleright \dot{Y}(y\otimes z_{(2)}))\,\dot{Y}(x_{(2)}\otimes z_{(1)})$
- $\dot{Y}(x\otimes yz) = \sum \dot{Y}(x_{(1)}\otimes z_{(2)})\,(\dot{Y}(x_{(2)}\otimes y)\triangleleft z_{(1)})$

## 定理の証明の方針

補題3を用いて補題2に帰着させる。

$$\mu^{[g_1+\cdots+g_n]}\bar{Y}^{\otimes g_1+\cdots+g_n}(J\tilde{T})$$

$R^{\pm 1}$と$K^{\pm 1}$から成る式

$$=\mu^{[g_1+\cdots+g_n]}\sum_{i,\cdots}\bar{Y}^{\otimes g_1+\cdots+g_n}\left(\cdots\otimes\cdots D'\hat{F}^{(i)}K^{-i}\cdots\otimes\cdots D''e^{i}\cdots\otimes\cdots\right)$$

$$\underset{\text{補題1.3}}{=}\sum_{i,\cdots}\mu^{[g_1+\cdots+g_n]}\underbrace{G_{i,\cdots}}_{\in\,(\bar{U}_q^{ev})^{\otimes g_1+\cdots+g_n}}$$

補題2の左辺達から成る式

補題2

$$\in\{(\bar{U}_q^{ev})^{\otimes n}\}^{\wedge}$$

□