

普遍量子不変量と色付き 理想単体分割

鈴木咲衣

2018.6.13 @東工大

イントロダクション

普遍量子不変量と色付き理想単体分割

イントロダクション

絡み目

Definition

向きを持ついくつかの円周 S^1 を 3次元空間 S^3 に埋め込んだ像のことを絡み目という。



(円周が一つの時特に結び目とも言う)

イソトピックな絡み目

Definition

ひもが自己交差しないように連続的に変形して移りあう2つの絡み目を，互いにイソトピックであるという。



絡み目の不変量

Definition (絡み目の不変量)

写像 $f: \{\text{絡み目}\} \rightarrow I$ で

$$L \sim L' \Rightarrow f(L) = f(L')$$

を満たすものを絡み目の不変量と呼ぶ。

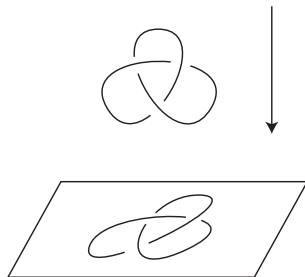
<例> 成分数 $s: \{\text{絡み目}\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$

$$s\left(\begin{array}{c} \text{三葉絡み目} \\ \text{と} \\ \text{単体} \end{array} \right) = 4 .$$


絡み目の図式

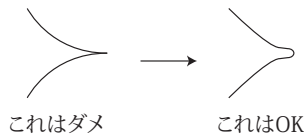
Definition

絡み目を平面に射影し、線が交差しているところに上下の情報をつけたものを絡み目の図式という。

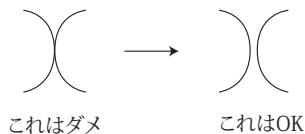


ダメな例

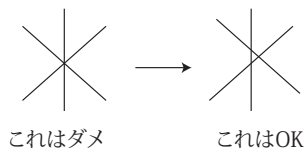
(I) とがった部分



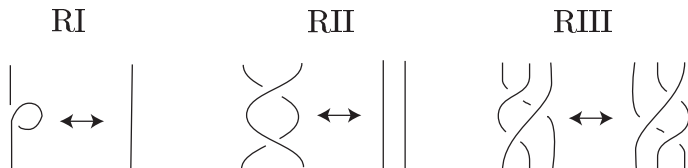
(II) 線と線が接する部分



(III) 三重点



ライデマイスター移動 RI, RII, RIII



Theorem (絡み目と図式の関係)

$$\{\text{絡み目}\} / \sim \xleftrightarrow{1:1 \text{ 対応}} \{\text{絡み目の図式}\} / \sim_{RI, RII, RIII}$$

研究の背景

1984 年 Jones 多項式

↓
“量子不変量”

- ▶ Kontsevich 不変量
- ▶ 普遍量子不変量
- ▶ Reshetkhin–Turaev 不変量
- ▶ 色付き Jones 多項式

研究の背景

1984 年 Jones 多項式



“量子不変量”

- ▶ Kontsevich 不変量
- ▶ 普遍量子不変量
- ▶ Reshetkhin–Turaev 不変量
- ▶ 色付き Jones 多項式

研究の背景

不変量構成の KEY POINT


 \mapsto

“ R 行列”

RIII 移動 $\left(\begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{X} \\ \text{Y} \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{X} \\ \text{Y} \end{array} \right)$

 \mapsto

“6 項関係式”

研究の背景

- ▶ Reshetkhin-Turaev 不変量

$R \in \text{End}(V \otimes V)$, V : 有限次元線形空間

$$(1 \otimes R)(R \otimes 1)(1 \otimes R) = (R \otimes 1)(1 \otimes R)(R \otimes 1)$$

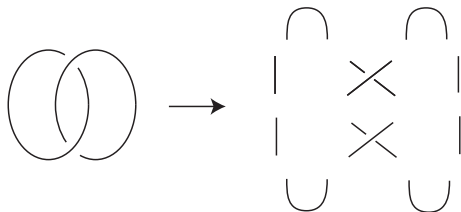
- ▶ 普遍量子不変量

$R \in \mathfrak{R}^{\otimes 2}$, \mathfrak{R} : リボンホップ代数

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

研究の背景

量子不変量は**図式**を使って**組み合わせ的**に構成される。



⇒ 絡み目の**幾何学的性質**との関係が明らかではない。

研究の背景

絡み目の “幾何学的性質” とは？

研究の背景

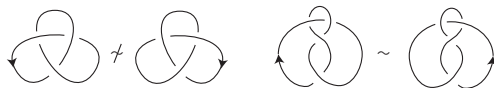
絡み目の“幾何学的性質”とは？

<例1> 簡単な変形操作を用いて定義されるような性質

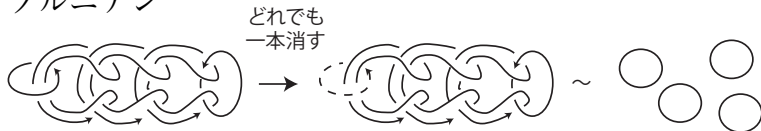
▶ 可逆性



▶ もろ手形



▶ ブルニアン



研究の背景

絡み目の “幾何学的性質” とは？

研究の背景

絡み目の“幾何学的性質”とは？

研究の背景

絡み目の“幾何学的性質”とは？

<例3> 絡み目の古典的な不変量の値

- ▶ 絡み数, ミルナー不変量

$$\mu_{i,j} \left(\begin{array}{c} \text{Two circles, one solid, one dashed, labeled } i \text{ and } j \end{array} \right) = 1, \quad \mu_{i,j,k} \left(\begin{array}{c} \text{Three circles, one solid, two dashed, labeled } i, j, k \end{array} \right) = 1$$

- ▶ 成分数, 補空間の基本群やホモロジー, 双曲体積、など

研究の背景

一方、量子不変量は絡み目の集合に新しい性質を定義する。

研究の背景

一方、量子不変量は絡み目の集合に新しい性質を定義する。

- ▶ $V(L) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$: 絡み目 L のジョーンズ多項式
絡み目の集合 \mathcal{L} の部分集合 $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{L}$ を

$$L \in \mathcal{L}_n \Leftrightarrow V(L) \in (q-1)^n \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$$

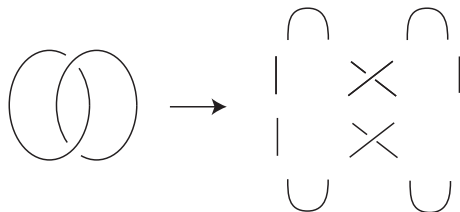
と定義すると、 \mathcal{L} のフィルトレーション

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset \dots$$

が定まる。

研究の背景

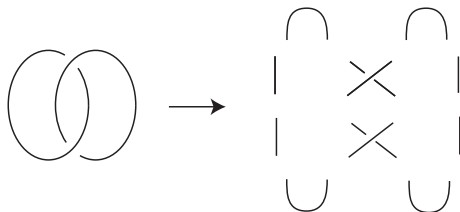
量子不変量は図式を使って組み合わせ的に構成される.



⇒ 絡み目の幾何学的性質との関係が明らかではない.

研究の背景

量子不変量は図式を使って組み合わせ的に構成される。



⇒ 絡み目の幾何学的性質との関係が明らかではない。

⇒ 量子不変量**それ自体の理解**が難しい

& 量子不変量と**既存の研究との関係**もよく解らない

研究の背景

TASK

量子不変量と絡み目の幾何学的性質の関係を理解せよ！

研究の背景

METHODS

絡み目 (3-dim. obj.)

(w/ 3次元的な幾何学的性質)

量子不変量

(w/ 代数的的性質)

研究の背景

METHODS

絡み目 (3-dim. obj.)

(w/ 3次元的な幾何学的性質)



絡み目図式 (2-dim. obj.)

(w/ 2次元的な幾何学的性質)

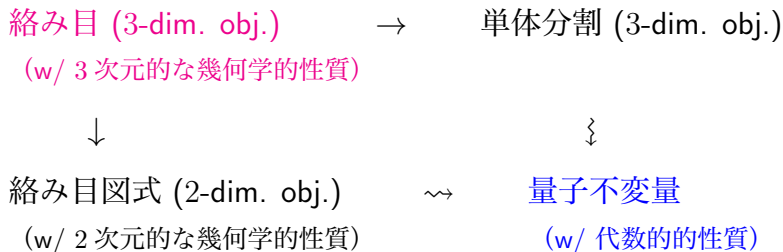


量子不変量

(w/ 代数的的性質)

研究の背景

METHODS



図式を用いた普遍量子不変量の定義

図式を用いた不変量構成のポイント

Theorem

同じ絡み目の2つの図式は RI , RII , $RIII$ と平面のイソトピーで移り合う.


 \mapsto

普遍 R 行列


 \mapsto

量子ヤンバクスター方程式
 $R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$

Drinfeld double と 普遍量子不変量

$A = (A, \eta, m, \varepsilon, \Delta, \gamma)$ を体 k 上の有限次元ホップ代数,
 $\{e_a\}_a$ をその基底とする.

▶ Drinfeld double $D(A) \sim_k A^* \otimes A$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R &= \sum_a (1 \otimes e_a) \otimes (e^a \otimes 1) \in D(A)^{\otimes 2} \text{ s.t.} \\ R_{12}R_{13}R_{23} &= R_{23}R_{13}R_{12} \in D(A)^{\otimes 3}. \end{aligned}$$

Drinfeld double と 普遍量子不変量

$A = (A, \eta, m, \varepsilon, \Delta, \gamma)$ を体 k 上の有限次元ホップ代数,
 $\{e_a\}_a$ をその基底とする.

▶ Drinfeld double $D(A) \sim_k A^* \otimes A$

$$\Rightarrow R = \sum_a (1 \otimes e_a) \otimes (e^a \otimes 1) \in D(A)^{\otimes 2} \text{ s.t.}$$

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \in D(A)^{\otimes 3}.$$

⌋ 絡み目図式

普遍量子 $D(A)$ 不変量

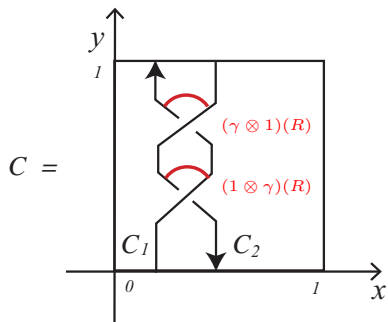
組ひもの普遍量子 $D(A)$ 不変量

(1) 図式を選ぶ

(2) ラベルを付ける



(3) ラベルを読む



$$J(C) = \sum \gamma(\alpha)\gamma(\beta') \otimes \alpha'\beta \in D(A) \otimes D(A).$$

$$(R = \sum \alpha \otimes \beta = \sum \alpha' \otimes \beta' \in D(A))$$

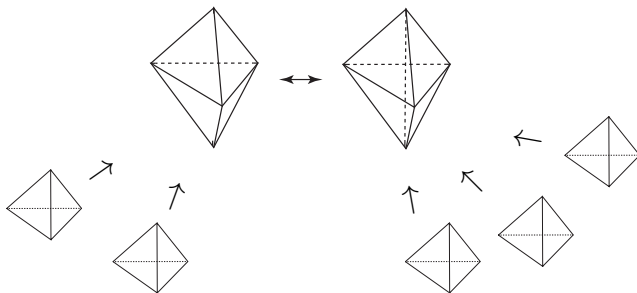
理想単体分割を用いた普遍量子不変量の再構成

単体分割を用いた不変量再構成のポイント

Theorem

3次元多様体の2つの単体分割は *Pachner moves* で移り合う.

Pachner (2, 3) move



単体分割を用いた不変量構成のポイント

“S 行列”：なんらかの 5 項関係式を満たす代数的な元

出来てほしい不変量の性質



\mapsto

“S 行列”

Pachner (2, 3) move

\mapsto

“5 項関係式”

単体分割を用いた不変量構成のポイント

“S 行列”：なんらかの 5 項関係式を満たす代数的な元

出来てほしい不変量の性質



\mapsto

“S 行列”

Pachner (2, 3) move

\mapsto

“5 項関係式”

cf. Turaev-Viro 不変量などの state sum 不変量

Heisenberg double と 普遍量子不変量

$A = (A, \eta, m, \varepsilon, \Delta, \gamma)$ を体 k 上の有限次元ホップ代数,
 $\{e_a\}_a$ をその基底とする.

▶ Heisenberg double $H(A) \sim_k A^* \otimes A$

$$\Rightarrow S = \sum_a (1 \otimes e_a) \otimes (e^a \otimes 1) \in H(A)^{\otimes 2} \text{ s.t.} \\ S_{12}S_{13}S_{23} = S_{23}S_{12} \in H(A)^{\otimes 3}.$$

Heisenberg double と 普遍量子不変量

$A = (A, \eta, m, \varepsilon, \Delta, \gamma)$ を体 k 上の有限次元ホップ代数,
 $\{e_a\}_a$ をその基底とする.

▶ Heisenberg double $H(A) \sim_k A^* \otimes A$

$$\Rightarrow S = \sum_a (1 \otimes e_a) \otimes (e^a \otimes 1) \in H(A)^{\otimes 2} \text{ s.t.}$$

$$S_{12}S_{13}S_{23} = S_{23}S_{12} \in H(A)^{\otimes 3}.$$

⌋ 絡み目補空間の理想単体分割

普遍量子 $D(A)$ 不変量

Drinfeld double と 普遍量子不変量

$A = (A, \eta, m, \varepsilon, \Delta, \gamma)$ を体 k 上の有限次元ホップ代数,
 $\{e_a\}_a$ をその基底とする.

▶ Drinfeld double $D(A) \sim_k A^* \otimes A$

$$\Rightarrow R = \sum_a (1 \otimes e_a) \otimes (e^a \otimes 1) \in D(A)^{\otimes 2} \text{ s.t.}$$

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \in D(A)^{\otimes 3}.$$

⌋ 絡み目図式

普遍量子 $D(A)$ 不変量

Heisenberg double と 普遍量子不変量

$A = (A, \eta, m, \varepsilon, \Delta, \gamma)$ を体 k 上の有限次元ホップ代数,
 $\{e_a\}_a$ をその基底とする.

▶ Heisenberg double $H(A) \sim_k A^* \otimes A$

$$\Rightarrow S = \sum_a (1 \otimes e_a) \otimes (e^a \otimes 1) \in H(A)^{\otimes 2} \text{ s.t.}$$

$$S_{12}S_{13}S_{23} = S_{23}S_{12} \in H(A)^{\otimes 3}.$$

⌋ 絡み目補空間の理想単体分割

普遍量子 $D(A)$ 不変量

Drinfeld double vs Heisenberg double

antipode $\gamma: A \rightarrow A$ として, $\tilde{e}_a = \gamma(e_a)$, $\tilde{e}^b = (\gamma^*)^{-1}(e^b)$,

$$S' = \sum (1 \otimes \tilde{e}_a) \otimes (e^a \otimes 1) \in H(A)^{\text{op}} \otimes H(A),$$

$$S'' = \sum (1 \otimes e_a) \otimes (\tilde{e}^a \otimes 1) \in H(A) \otimes H(A)^{\text{op}},$$

$$\tilde{S} = \sum (1 \otimes \tilde{e}_a) \otimes (\tilde{e}^a \otimes 1) \in H(A)^{\text{op}} \otimes H(A)^{\text{op}},$$

とおく.

Theorem (Kashaev '97)

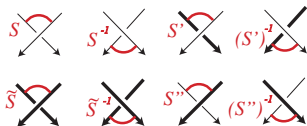
単射の代数射 $\phi: D(A) \rightarrow H(A) \otimes H(A)^{\text{op}}$ で次を満たすものが存在する.

$$\phi^{\otimes 2}(R) = S''_{14} S_{13} \tilde{S}_{24} S'_{23}.$$

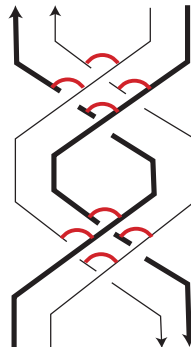
組みひもの普遍量子 $D(A)$ 不変量の再構成

(1) 図式を二重化する

(2) ラベルを付ける



(3) ラベルを読む



$$J'(C) = \phi^2(J(C)) \in (H(A) \otimes H(A)^{\text{op}})^{\otimes 2}.$$

Sketch of proof

$$J: \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \mapsto R$$

$$J': \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \end{array} \mapsto S''_{14} S_{13} \tilde{S}_{24} S'_{23}$$

Sketch of proof

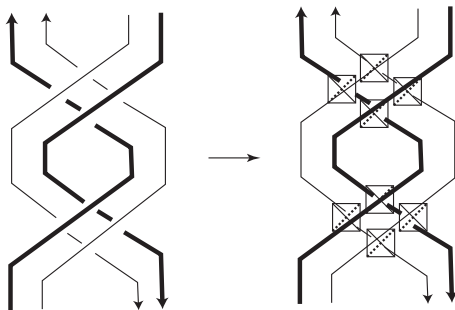
$$J: \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \mapsto R$$

$$J': \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \end{array} \mapsto S''_{14} S_{13} \tilde{S}_{24} S'_{23} = \phi^{\otimes 2}(R)$$

絡み目補空間の理想単体分割との関係

絡み目補空間の理想単体分割との関係

- (1) 理想四面体を二重化した後の交点に配置する.
- (2) 理想四面体をはり合わせる.

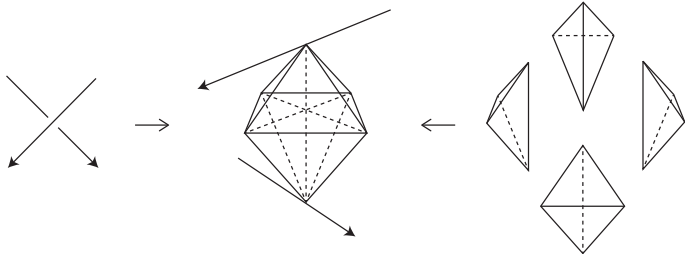


(線の向きと太さからはり合わせ方法が決まる.)

絡み目補空間の理想単体分割との関係

絡み目を二重化した図式

⇒ 絡み目補空間 (in $S^3 \setminus \{\pm\infty\}$) の八面体分割



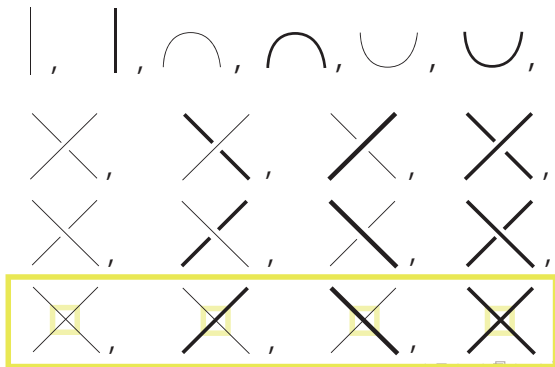
$$\phi^{\otimes 2}(R)$$

=

$$S''_{14} S_{13} \tilde{S}_{24} S'_{23}$$

一般化

- ▶ 結び目図式の二重化に限らず，以下のパーツを組み合わせてできる任意の図式に対して同様の操作で複体が得られる (→ branched spine) .



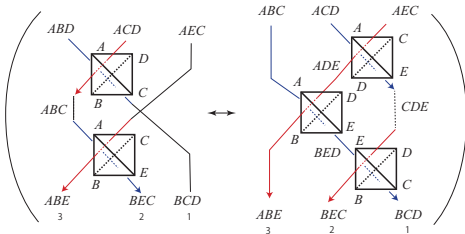
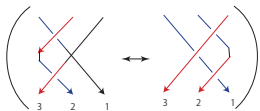
一般化

[Benedetti-Petronio]

- ▶ 任意の境界付き 3次元多様体がこの方法で得られる.
- ▶ 一般に 3次元多様体の任意の単体分割がこの方法で得られるわけではない.

Colored moves

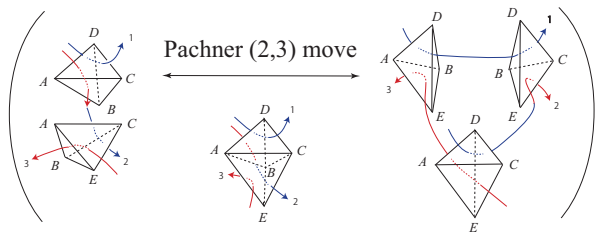
colored Pachner (2,3) move



||

pentagon relation

J'



Remark

- ▶ [joint work with 寺嶋]
 $\gamma^2 = 1 \Rightarrow$ 閉3次元多様体の不変量.
- ▶ 予想 [joint work with 寺嶋]:
 $\gamma^2 \neq 1 \Rightarrow$ 枠付き閉3次元多様体の不変量.
- ▶ 圏と関手としての定式化.
- ▶ $H(B_q(sl_2))$ と表現 $L^2(\mathbb{R})$ を使って TQFT を作り,
 $\text{Vol}(M) + i\text{CS}(M)$ を得たい.

先行研究との比較

- ▶ 普遍量子 $D(A)$ 不変量の再構成 (Reshetkhin-Turaev 不変量の単体分割を用いた定義とも言える)
- ▶ 単体分割を用いた状態和不変量 (Turaev-Viro 不変量, 量子双曲不変量など) の非可換代数バージョン

結果の意義

- ▶ 単体分割を用いた普遍量子不変量の理解
- ▶ いろいろな量子不変量（Reshetkhin-Turaev 不変量, WRT 不変量, Turaev-Viro 不変量, 量子双曲不変量, Kuperberg 不変量など）を統一的に理解するためのステップ