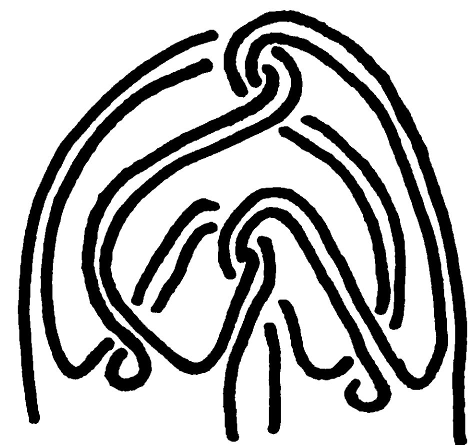
境界底タングルの普遍 sl_2 不変量について

京都大学数理解析研究所

鈴木咲衣

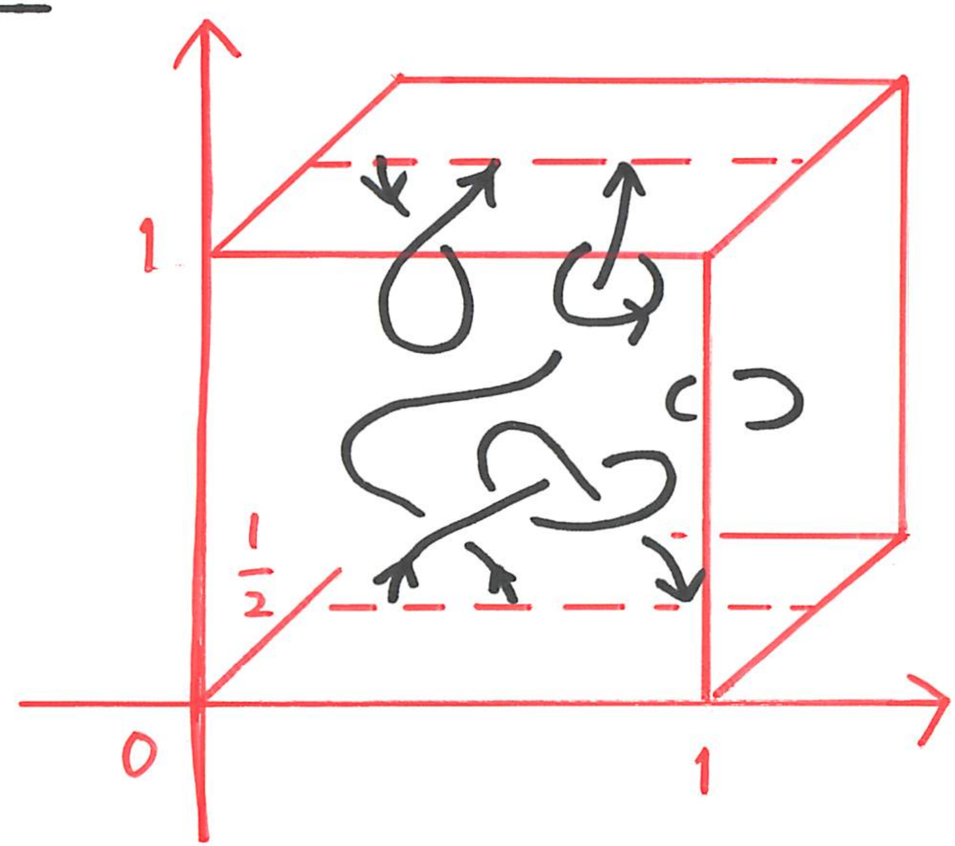


今日の話

• タングル in a cube

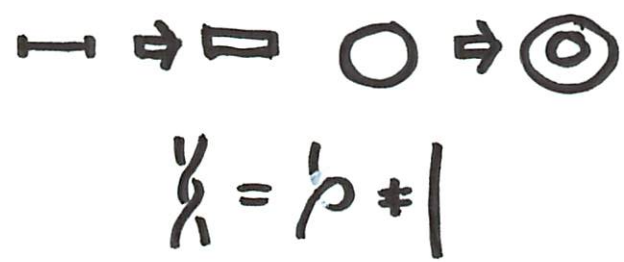
例)

$$\coprod^{3}[0,1]\coprod^{2}S^1 \xhookrightarrow[\text{emb}]{}$$



• 向き付き

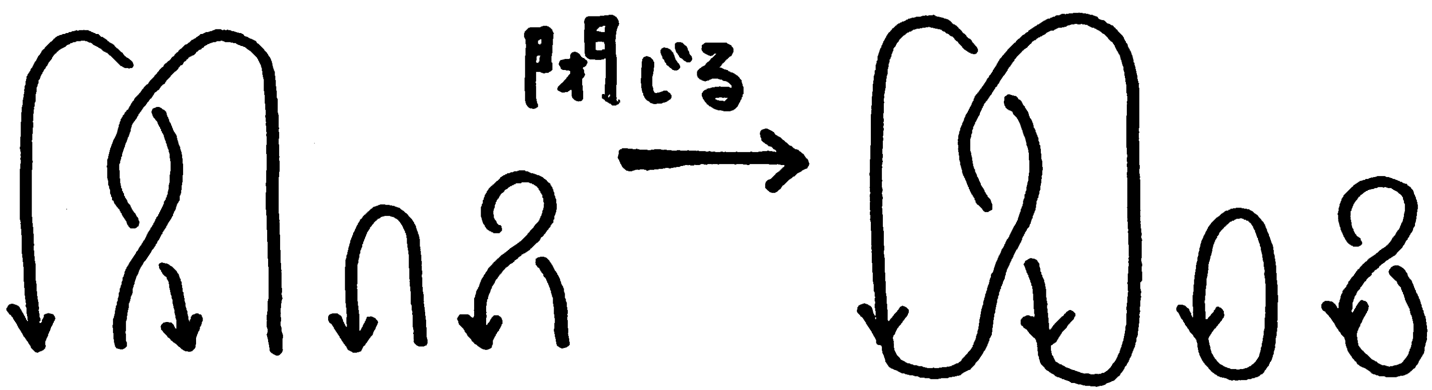
• フレーミング付き



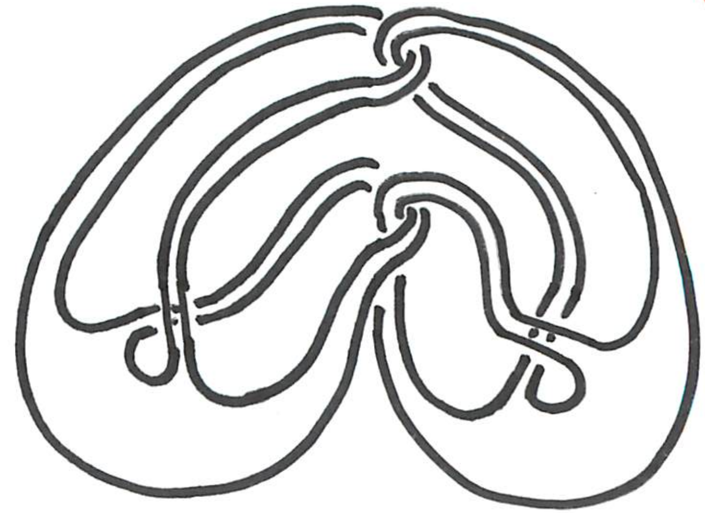
• 境界 $\in [0,1]\times\{\frac{1}{2}\}\times\{0,1\}$

底タングル in a cube $[0.1]^{\times 3}$

- 弧のみから成るタングル
- 境界は底に一列に並んでいる
- 連結成分の境界は隣合い，
  右から出て左へ入る

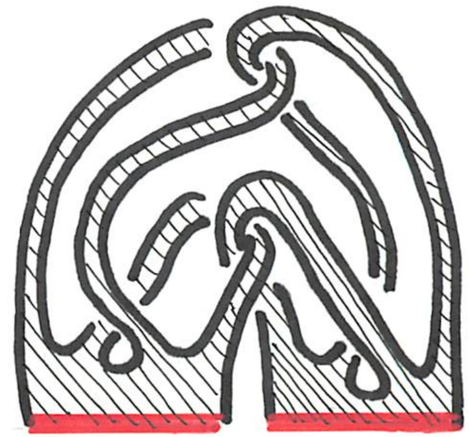


境界絡み目 $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$



$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 各L_iが互いに交わりを持たない
Seifert曲面を張る絡み目

境界底タングル $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$



$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 各$\overline{T_i}$が互いに交わりを持たない
Seifert曲面 in $[0,1]^3$
を張る底タングル

※ $\overline{T_i}$: T_iを底の直線で閉じた結び目

研究の目的：底タングルの普遍不変量の性質の解明

普遍sl_2不変量(Laurence, Ohtsuki)

底タングルT

色つきJones多項式

量子トレース

$$J_T \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n} \xrightarrow[tr_q^{V_1}\otimes\cdots\otimes tr_q^{V_n}]{} J(cl(T);V_1,\cdots,V_n)$$

※ $V_1,\cdots,V_n$: $U_h(sl_2)$の有限次元表現

? ・絡み目の位相幾何的性質との関係 (^{ex} 境界，リボン)

・他の不変量との関係 (^{ex} Alexander poly, Milnor inv)

・量子展開環 $U_h(sl_2)$ / $\mathbb{Q}[[h]]$

生成元：H, E, F

関係式：$HE-EH=2E$, $HF-FH=-2F$

$$EF-FE = \frac{K-K^{-1}}{q^{1/2}-q^{-1/2}}$$

ただし $q=\exp h$, $K=\exp\frac{hH}{2}$

$\Rightarrow$ $U_h(sl_2)$ はリボンホップ代数構造を持つ.

リボンホップ代数 $/\Bbbk$ $\quad U=(U,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon,S,R,\theta)$

• ホップ代数

$\mu : U\otimes U \to U$

$\eta : \Bbbk \to U$

$\Delta : U \to U\otimes U$

$\varepsilon : U \to \Bbbk$

$S : U \to U$

with

• $R\in U\otimes U$: invertible

$R\Delta(x)R^{-1}=\Delta^{op}(x) \quad {}^\forall x\in U$

$(1\otimes\Delta)R = R_{13}R_{12}$

$(\Delta\otimes 1)R = R_{13}R_{23}$

• $\theta\in U$: central, invertible

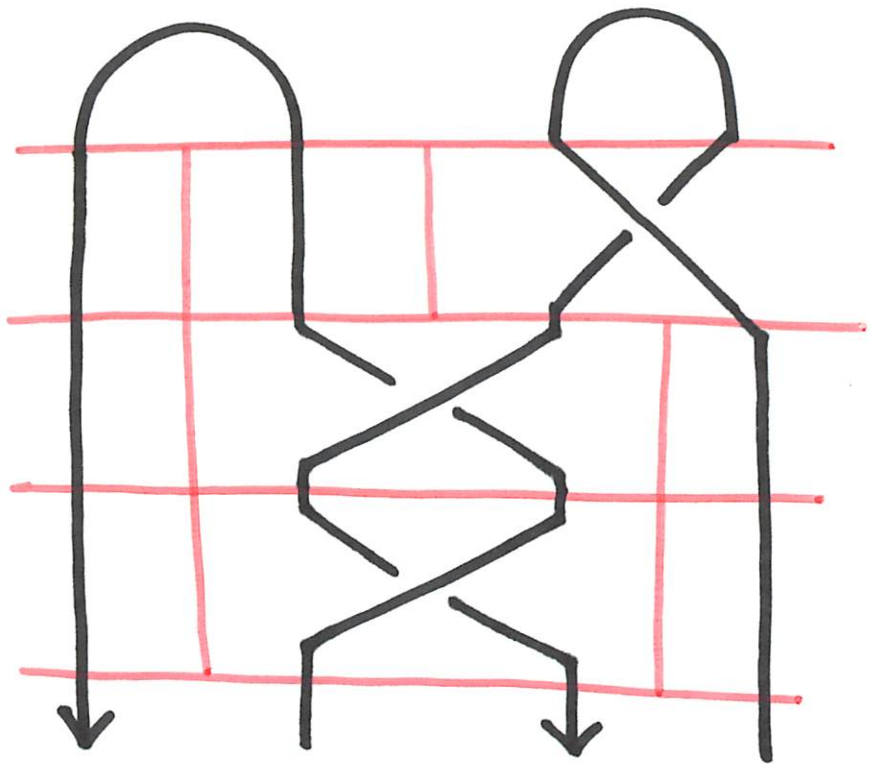
$\Delta(\theta)=(\theta\otimes\theta)(R_{21}R)^{-1}$

$S(\theta)=\theta,\ \varepsilon(\theta)=1$

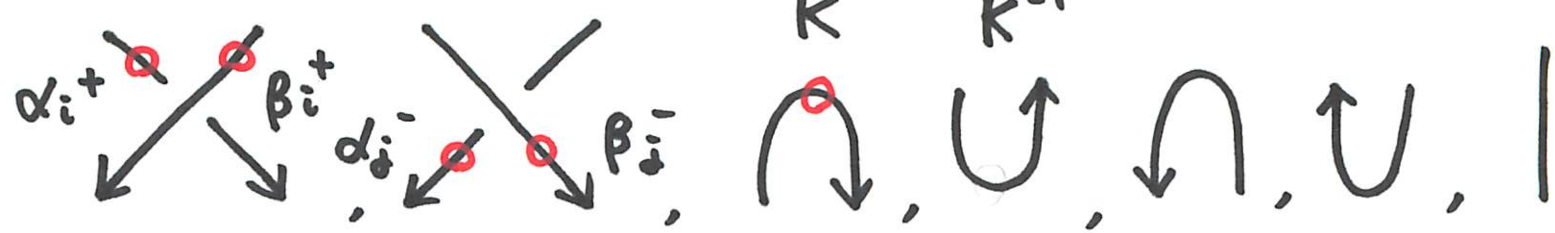
普遍sl_2不変量J_T , $T=T_1\cup\cdots\cup T_n$：底タングル

Step1 Tを $\times$, $\times$, $\cap$, $\cup$, $|$ から成る図式で表す.

〈例〉

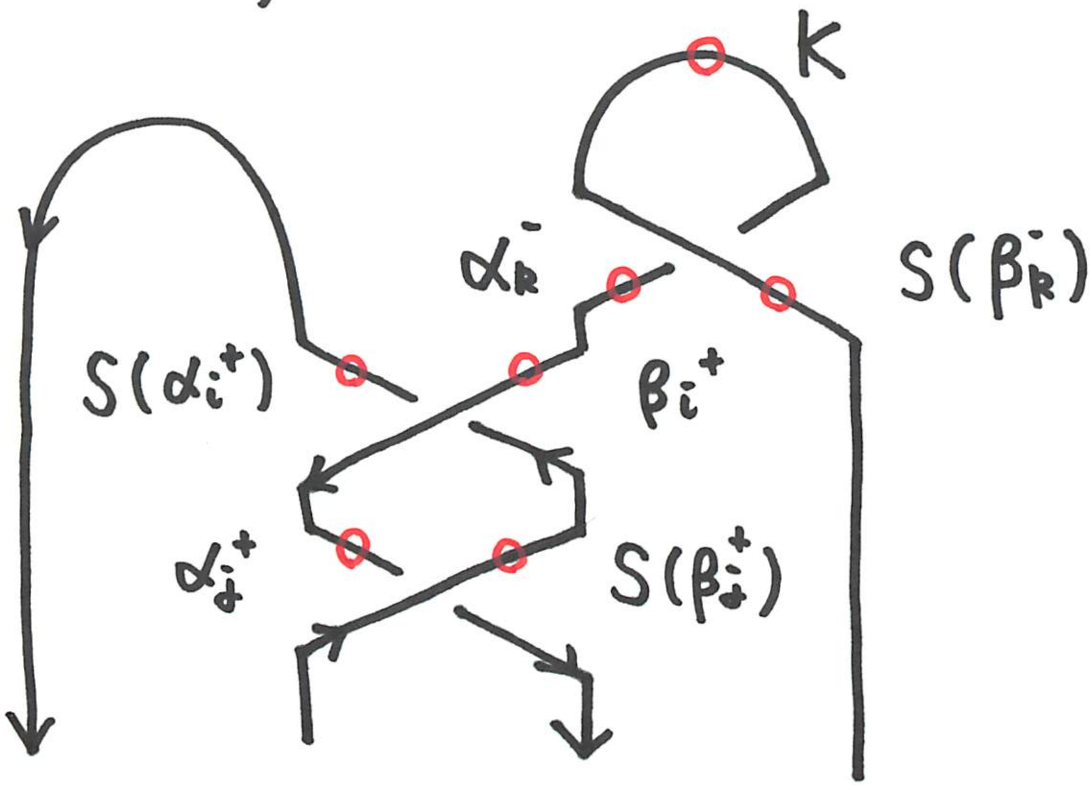
$T=$  $\rightsquigarrow$ 

Step2　各部分にラベルをつける. $\left(R^{\pm1}=\sum_i \alpha_i^{\pm}\otimes\beta_i^{\pm}\right)$



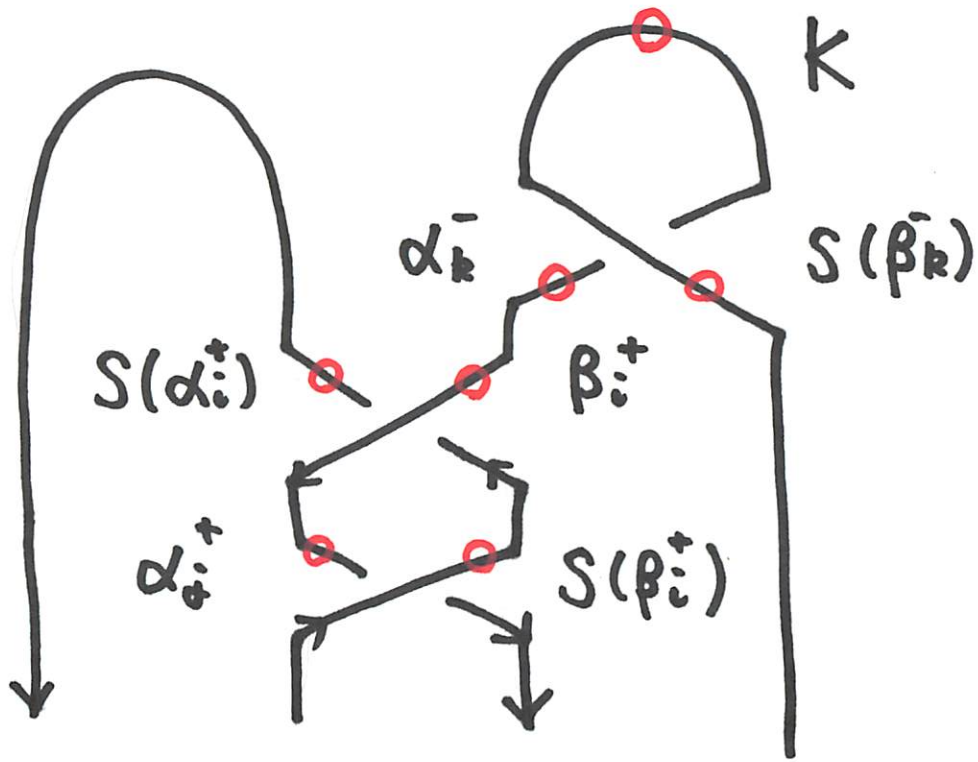
(ただし上向きのときS)

〈例〉



Step3 ひもを逆向きにたどりながらラベルを読み，順にテンソル積をとり．添え字について和をとる．

〈例〉



$$J_T = \sum_{i,j,k} S(\alpha_i^+)S(\beta_j^+) \otimes \alpha_j^+\beta_i^+\alpha_k^- K S(\beta_k^-) \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} 2}$$

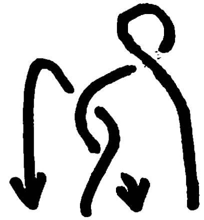
キゴウ

- $[i]_q = \dfrac{q^i - 1}{q - 1}$, $[i]_q! = [i]_q [i-1]_q \cdots [1]_q$,
- $e = (q^{1/2} - q^{-1/2}) E$, $\tilde{F}^{(i)} = \dfrac{F^i K^i}{[i]_q!}$, $(i \geq 0)$
- $D = q^{\frac{1}{4} H \otimes H} = \exp\left(\dfrac{h}{4} H \otimes H \right)$

普遍R-行列

$$\underline{R = D \left(\sum_{n \geq 0} q^{\frac{1}{2} n(n-1)} \tilde{F}^{(n)} K^{-n} \otimes e^n \right)}$$

$$\underline{R^{-1} = D^{-1} \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \tilde{F}^{(n)} \otimes K^{-n} e^n \right)}$$

$J\Big($  $\Big)$

$$= \sum_{m,n,l\geq 0} (-1)^{m+n} q^{-\frac{1}{2}l(l-1)-n^2+2mn-3nl-2ml} \begin{bmatrix} n+l \\ n \end{bmatrix}_q$$

$$D^{-2}\left(1 \otimes q^{\frac{1}{4}H(H+2)}\right)\left(\tilde{F}^{(m)} K^{-2n} e^{n} \otimes \tilde{F}^{(n+l)} K^{2(n-m)} e^{l+m}\right)$$

$\Bigg($ ただし $\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_q = \dfrac{[i]_q[i-1]_q \cdots [i-j+1]_q}{[j]_q!} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$

for $i \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0$ $\Bigg)$

- $f = (q-1)FK \quad \left(= (q-1)\tilde{F}^{(1)} \right)$
- $\bar{U}_q^{ev}$: $f, e, K^{\pm 2}$ で生成される $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-部分代数 in $U_h(sl_2)$

定理

T : n 成分境界底タングル

$\Rightarrow J_T \in \left\{ (\bar{U}_q^{ev})^{\otimes n} \right\}^{\wedge}$

注) $f^i = q^{-\frac{1}{2}i(i-1)}(q^i-1)(q^{i-1}-1)\cdots(q-1)\tilde{F}^{(i)}$

4. Main theorems & applications

$$J_T = \sum_{a,M,N,n,k,p_1,p_2,s_1,s_2,z,x,S,\tilde{S}} q^{\left\{p_1^2+p_1(x-k-s_1)+p_2^2+p_2(z-n-s_2)+s_1^2+s_1(N-S-n-x)+s_2^2+s_2(M-\tilde{S}-k-z)+\frac{1}{2}S(S+1) +S(k+x-N-2a)+\frac{1}{2}\tilde{S}(\tilde{S}+1)+\tilde{S}(n+z+M-2N-2a)-k^2+k(6n+2a+M-4N)-n^2+n(M-3N-2a) +\frac{1}{2}N(N+1)+2N^2+N(2a-2z-1)+\frac{1}{2}M(M+1)+M(2a-2x)+x^2+z^2-(x+z)a+\frac{1}{2}a(a-1)\right\}}$$

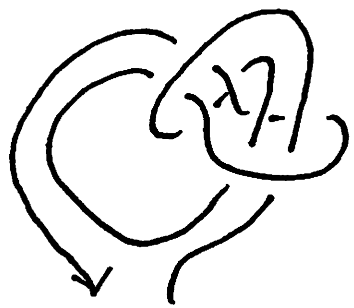
$$\begin{bmatrix} k \\ p_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} p_1 \\ s_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} N+2n-2M-p_1+s_1-1 \\ n-p_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} N-p_1 \\ M-x-p_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} M-x-p_1 \\ S-s_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} 2M-x+2n+S+s_1-1 \\ x-k+p_1 \end{bmatrix}_q$$
$$\begin{bmatrix} n \\ p_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} p_2 \\ s_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} M+2k-2N-p_2+s_2-1 \\ k-p_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} M-p_2 \\ N-z-p_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} N-z-p_2 \\ \tilde{S}-s_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} 2N-z+2k+\tilde{S}+s_2+1 \\ z-n+p_2 \end{bmatrix}_q$$
$$\begin{bmatrix} N-M+x \\ x-z-a \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} z \\ x-z-a \end{bmatrix}_q \{x+z-a\}_q! \quad f^a K^{-2(M+N-n-k-S-\tilde{S})}\{H+z-N+M+3x-2a\}_{q,a-z-x} e^a.$$

ただし,

$$\{i\}_q = q^i - 1, \quad \{m\}_q! = \{m\}_q\{m-1\}_q \cdots \{1\}_q,$$
$$\{H+i\}_{q,m} = \{H+i\}_q\{H+i-1\}_q \cdots \{H+i-m+1\}_q,$$
$$\{H+j\}_q = q^{H+j} - 1 = q^j K^2 - 1,$$

$i, j \in \mathbb{Z}, m \geq 0.$

T =



応用定理

L : n成分 境界絡み目, $\ell_1, \dots, \ell_n \geq 0$

$$\Rightarrow J(L; P_{\ell_1}, \dots, P_{\ell_n}) \in \frac{\{2\ell_j+1\}_q!}{\{1\}_q} I_{\ell_1} \cdots \hat{I}_{\ell_j} \cdots I_{\ell_n}$$

$$P_\ell = \prod_{i=0}^{\ell-1} (V_2 - q^{i+\frac{1}{2}} - q^{i-\frac{1}{2}}),$$ V_2 : 2次元既約表現

$$I_\ell = \langle \{k\}_q! \{\ell-k\}_q! \{\ell\}_q! \mid 0 \leq k \leq \ell \rangle_{\text{ideal in } \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]}$$

$$\left(\{i\}_q = q^i - 1, \quad \{i\}_q! = \{i\}_q \{i-1\}_q \cdots \{1\}_q \right)$$

〈例〉L ：n成分境界絡み目

$$J(L;P_1,\ldots,P_1)\in(q-1)^{2n}(q+1)(q^2+q+1)\mathbb{Z}[q^{1/2},q^{-1/2}]$$

$$J(L;P_2,\ldots,P_2)\in(q-1)^{4n}(q+1)^{n+1}(q^2+q+1)(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)\mathbb{Z}[q^{1/2},q^{-1/2}]$$

$$J(L;P_3,\ldots,P_3)\in(q-1)^{6n}(q+1)^{2n+1}(q^2+q+1)^{n+1}(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)(q^2-q+1)(q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)\mathbb{Z}[q^{1/2},q^{-1/2}]$$

$J($  $;P_1,P_1)=q^{\frac{3}{4}}\left\{q^{-\frac{3}{2}}(q+1)(q^{1/2}-1)^2(q+q^{1/2}+1)\right\}\in\mathbb{Z}[q^{1/4},q^{-1/4}]$

$J($  $;P_1,P_1,P_1)=-q^{-\frac{7}{2}}(q-1)^4(q+1)(q^2+q+1)$

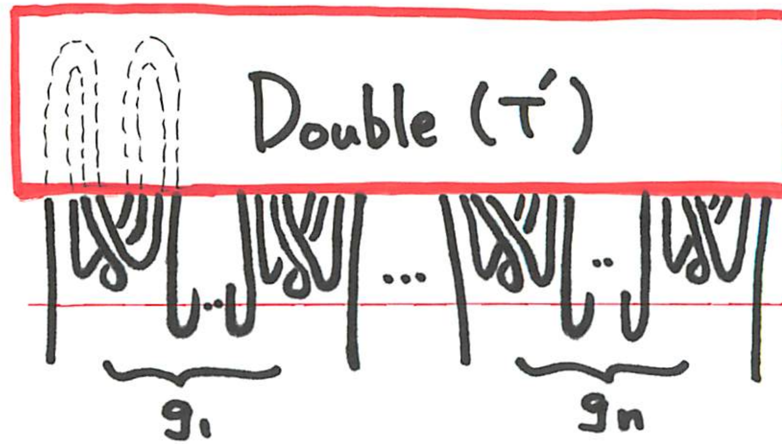
Key to the proof

$T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$: 境界底タングル

$F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$

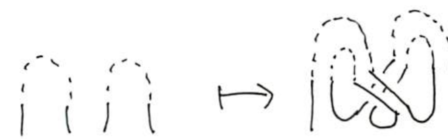
F_i : T_i の Seifert曲面, $g(F_i) = g_i$

$^{\exists} T' = T'_1 \cup \cdots \cup T'_{2(g_1+\cdots+g_n)}$

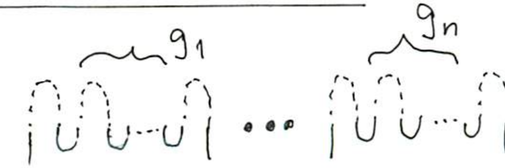
$F =$ 

(Habiro)

$$\Rightarrow \quad J_T = \mu^{[g_1,\cdots,g_n]}\, Y^{\otimes g_1+\cdots+g_n}(J_{T'})$$

$$Y : U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} 2} \to U_h(sl_2)$$ 

$$\sum x \otimes y \mapsto \sum x' \beta S\big((\alpha' y S(\alpha''))'\big) S(x'') (\alpha' y S(\alpha''))''$$

$$\mu^{[g_1,\cdots,g_n]} : U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} g_1+\cdots+g_n} \to U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$$ 

$$\sum x_1 \otimes \cdots \otimes x_{g_1+\cdots+g_n} \mapsto \sum x_1 \cdots x_{g_1} \otimes x_{g_1+1} \cdots x_{g_1+g_2} \otimes \cdots \otimes \cdots x_{g_1+\cdots+g_n}$$