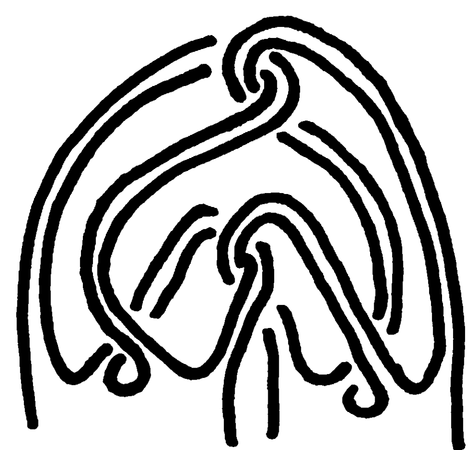
境界底タングルの普遍$\mathfrak{sl}_2$不変量について

京都大学数理解析研究所

鈴木咲衣



今日の話

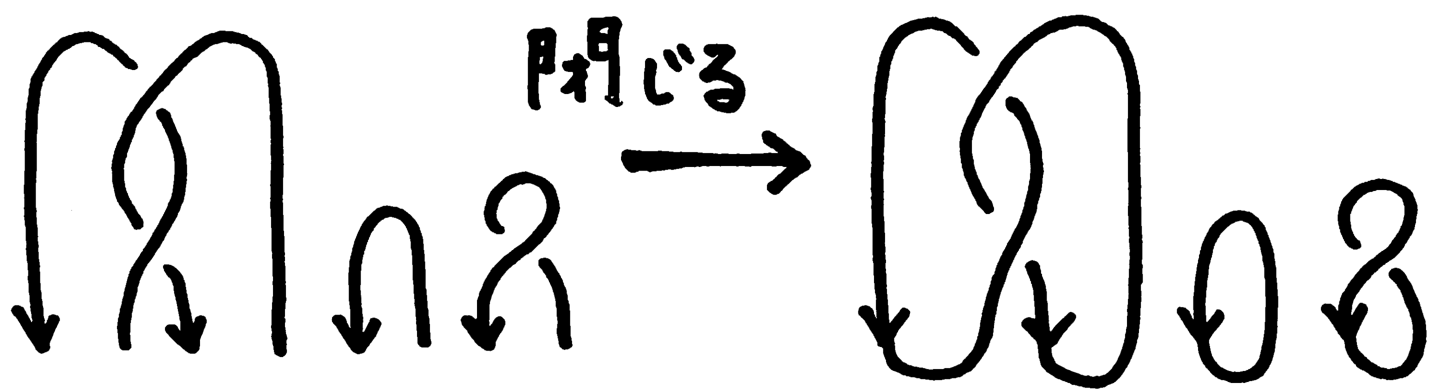
Ⅰ. 底タングル，境界底タングル

Ⅱ. 研究の目的

Ⅲ. 主結果と応用

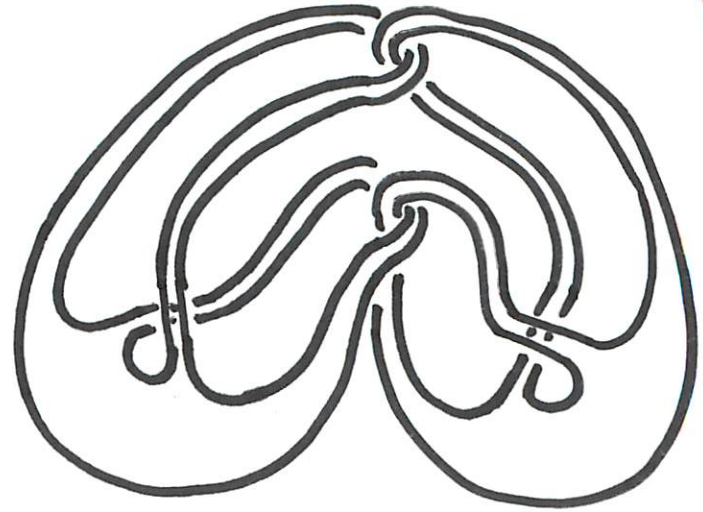
底タングル in a cube $[0.1]^{\times 3}$

- 弧のみから成るタングル
- 境界は底に一列に並んでいる
- 連結成分の境界は隣合い，右から出て左へ入る



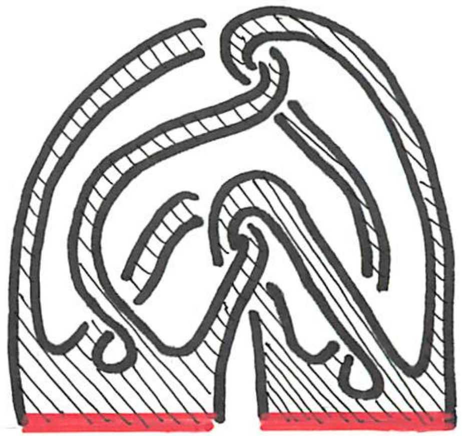
境界絡み目 $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 各 L_i が互いに交わりを持たない
Seifert曲面を張る絡み目



境界底タングル $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 各 $\overline{T_i}$ が互いに交わりを持たない
Seifert曲面 in $[0,1]^3$
を張る底タングル



※ $\overline{T_i}$: T_i を底の直線で閉じた結び目

研究の目的：底タングルの普遍不変量の性質の解明

普遍 sl_2 不変量 (Laurence, Ohtsuki)

底タングル T

$J_T \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$ $\xrightarrow[\mathrm{tr}_q^{V_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{tr}_q^{V_n}]{\text{量子トレース}}$ 色つき Jones 多項式 $J(cl(T); V_1, \cdots, V_n)$

※ $V_1, \cdots, V_n$: $U_h(sl_2)$ の有限次元表現

?

- 絡み目の位相幾何的性質との関係 (^{ex} 境界, リボン)
- 他の不変量との関係 (^{ex} Alexander poly, Milnor inv)

・量子展開環 $U_h(sl_2)$ / $\mathbb{Q}[[h]]$

生成元：H, E, F

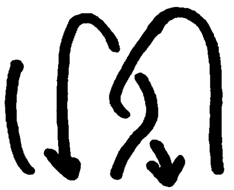
関係式：$HE-EH=2E$, $HF-FH=-2F$

$$EF-FE=\frac{K-K^{-1}}{q^{1/2}-q^{-1/2}}$$

ただし $q=\exp h$, $K=\exp\frac{hH}{2}$

$\Rightarrow$ $U_h(sl_2)$ はリボンホップ代数構造を持つ.

〈例〉

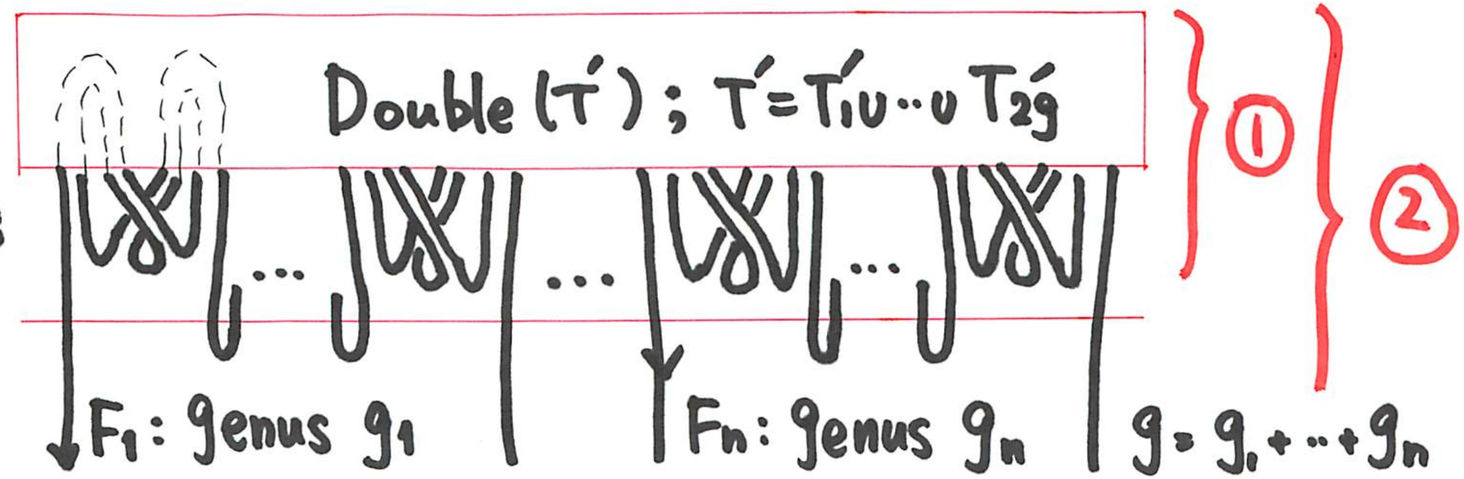
$J($  $)$

$$= \sum_{m,n\geq 0} (-1)^{m+n} q^{-n+2mn} D^{-2} \left(\tilde{F}^{(m)} K^{-2n} e^{n} \otimes \tilde{F}^{(n)} K^{-2m} e^{m} \right)$$

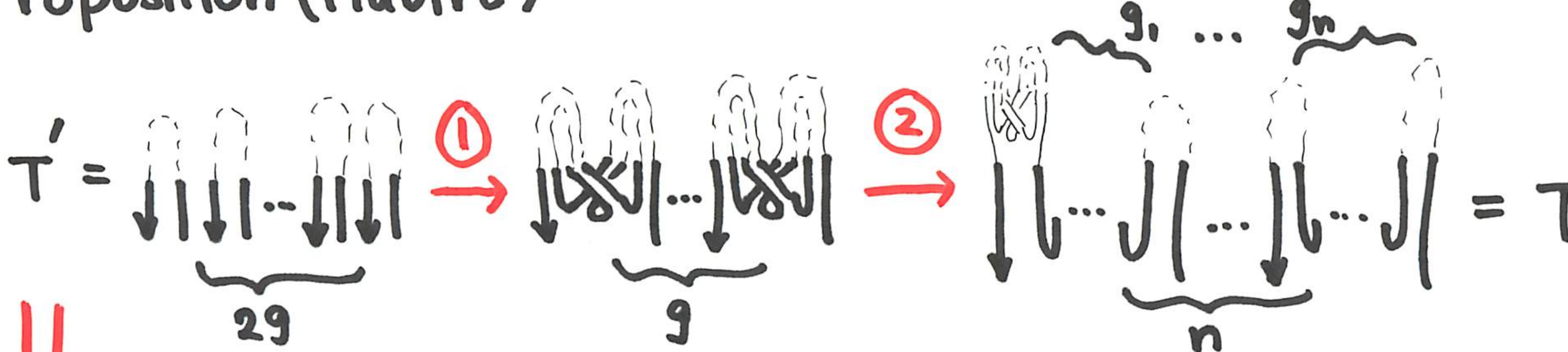
ただし

- $[i]_q = \dfrac{q^i - 1}{q - 1}$, $[i]_q! = [i]_q [i-1]_q \cdots [1]_q$,
- $e = (q^{1/2} - q^{-1/2}) E$, $\tilde{F}^{(i)} = \dfrac{F^i K^i}{[i]_q!}$, $(i \geq 0)$
- $D = q^{\frac{1}{4} H \otimes H} = \exp\left(\dfrac{h}{4} H \otimes H \right)$

境界底タングル T =



Proposition (Habiro)



$$\Downarrow$$

$$J_{T'} \xmapsto{①} Y^{\otimes g}(J_{T'}) \xmapsto{②} \mu^{[g_1,\dots,g_n]}\circ Y^{\otimes g}(J_{T'}) = J_T$$

$$J_{T'} \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} 2g}, \quad Y^{\otimes g}(J_{T'}) \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} g}, \quad J_T \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$$

- $f = (q-1)FK \quad \left(= (q-1)\tilde{F}^{(1)} \right)$
- $\bar{U}_q^{ev}$: $f, e, K^{\pm 2}$ で生成される $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-部分代数 in $U_h(sl_2)$

$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{定理}} \\ \quad T : n\text{成分境界底タングル} \\ \quad \Rightarrow J_T \in \left\{ (\bar{U}_q^{ev})^{\otimes n} \right\}^{\wedge} \end{array}}$

注) $f^i = q^{-\frac{1}{2}i(i-1)}(q^i-1)(q^{i-1}-1)\cdots(q-1)\tilde{F}^{(i)}$

〈応用例〉 $v = q^{1/2}$, V : 2次元既約表現, $P_1 = V - v - v^{-1}$

L : n成分境界絡み目

$$\Rightarrow J(L; P_1, \ldots, P_1) \in (v - v^{-1})^{2n}(v + v^{-1})(v + 1 + v^{-1})\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$$

B_n :

n成分 $(n \geq 3)$

$$\Rightarrow J(B; P_1, \ldots, P_1) = (-1)^n (v - v^{-1})^{2(n-1)}(v + v^{-1})^{n-2}(v + 1 + v^{-1})(v^2 + v^{-2})^{n-3}$$

$\boxed{\Rightarrow B_n \text{は境界絡み目ではない}}$