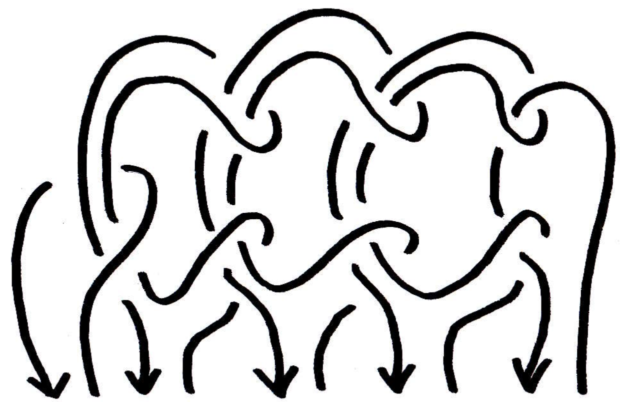
Brunnian 底タングルの普遍 sl_2 不変量について

京都大学数理解析研究所

鈴木咲衣



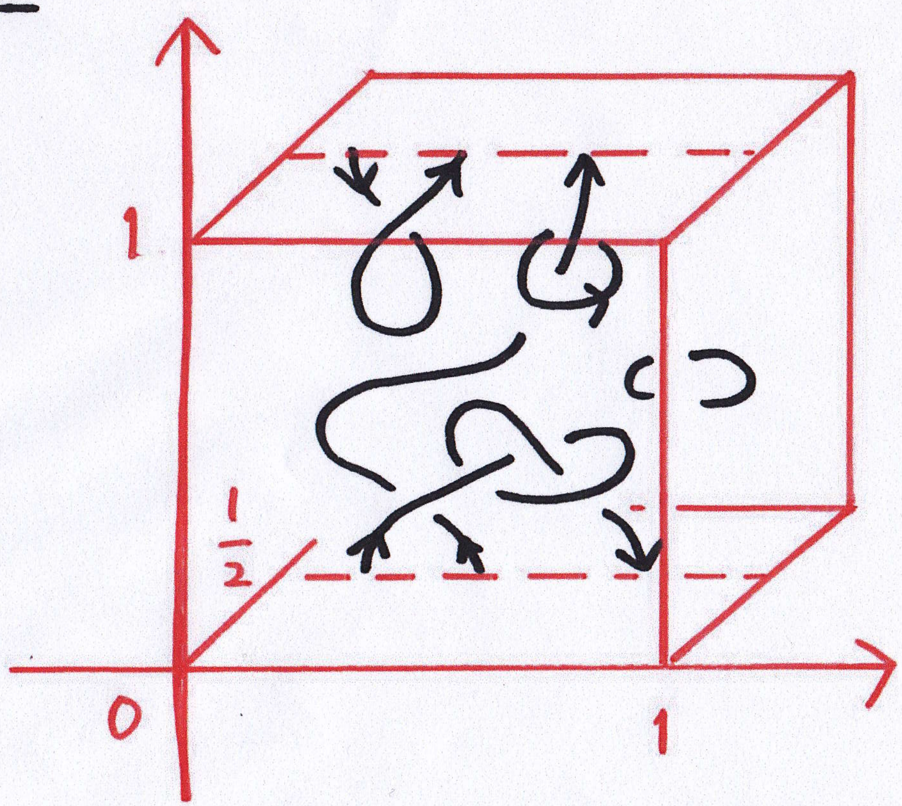
今日の話

1. タングル、底タングル、Brunnian底タングル
2. 研究の目的
3. 普遍sl_2不変量
4. 主結果と応用

・タングル in a cube

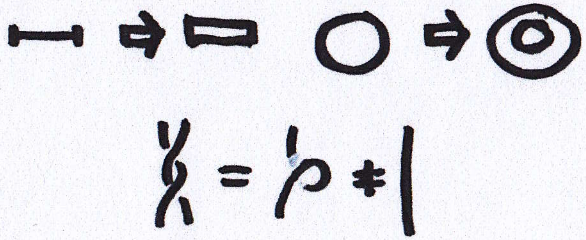
例)

$$\coprod^{3}[0,1]\coprod^{2}S^1 \xhookrightarrow{\text{emb}}$$



・向き付き

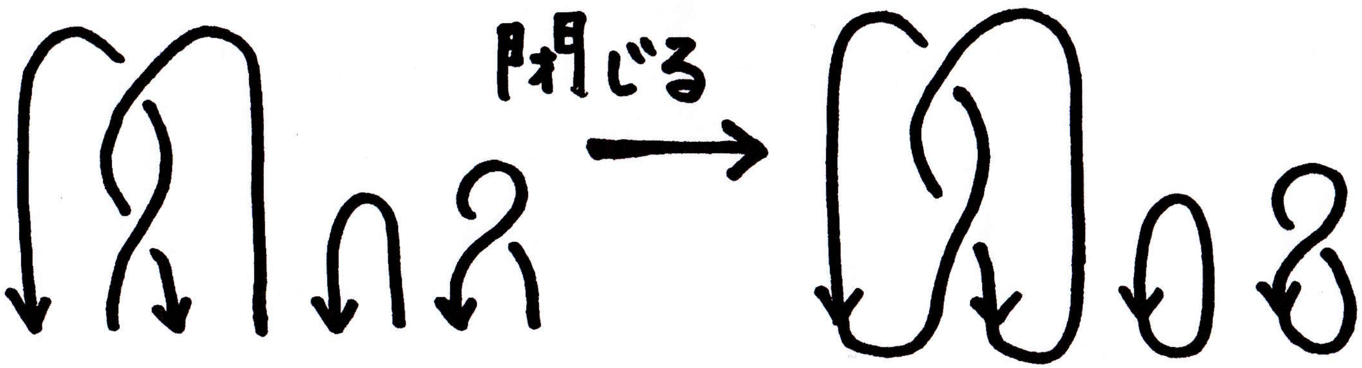
・フレーミング付き



・境界 $\in [0,1]\times\{\frac{1}{2}\}\times\{0,1\}$

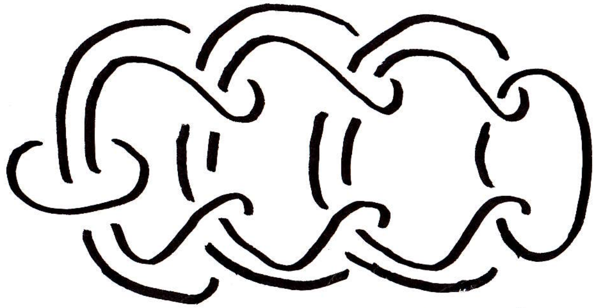
底タングル in a cube $[0.1]^{\times 3}$

- 弧のみから成るタングル
- 境界は底に一列に並んでいる
- 連結成分の境界は隣合い，
  右から出て左へ入る



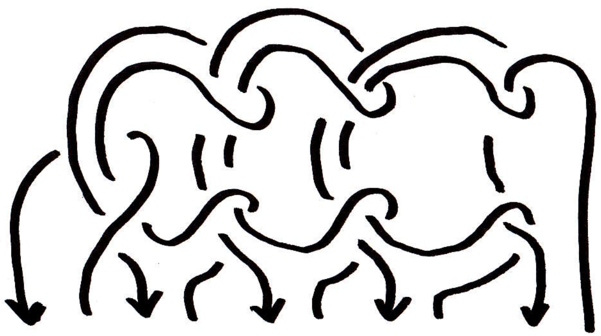
Brunnian 絡み目

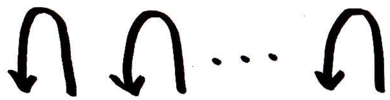
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の真部分絡み目がほどけるような絡み目



Brunnian 底タングル

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の真部分底タングルがほどけるような底タングル



※ 自明な底タングル ⇔ 

研究の目的：底タングルの普遍不変量の性質の解明

普遍 sl_2 不変量 (Laurence, Ohtsuki)

底タングル T

$J_T \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$

$$J_T \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n} \xrightarrow[\;tr_q^{V_1} \otimes \cdots \otimes tr_q^{V_n}\;]{\text{量子トレース}} J(cl(T); V_1, \cdots, V_n)$$

色つきJones多項式

$J(cl(T); V_1, \cdots, V_n)$

※ $V_1, \cdots, V_n$: $U_h(sl_2)$ の有限次元表現

?

・絡み目の位相幾何的性質との関係 (^{ex} 境界, リボン)

・他の不変量との関係 (^{ex} Alexander poly, Milnor inv)

・量子展開環 $U_h(sl_2)$ / $\mathbb{Q}[[h]]$

生成元：H, E, F

関係式：$HE-EH=2E$, $HF-FH=-2F$

$$EF-FE=\frac{K-K^{-1}}{q^{1/2}-q^{-1/2}}$$

ただし $q=\exp h$, $K=\exp\frac{hH}{2}$

$\Rightarrow$ $U_h(sl_2)$ はリボンホップ代数構造を持つ.

リボンホップ代数 $/\Bbbk$　$U=(U,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon,S,R,\theta)$

• ホップ代数

$\mu : U\otimes U \to U$

$\eta : \Bbbk \to U$

$\Delta : U \to U\otimes U$

$\varepsilon : U \to \Bbbk$

$S : U \to U$

with

• $R\in U\otimes U$: invertible

$R\Delta(x)R^{-1} = \Delta^{op}(x) \quad {}^{\forall}x\in U$

$(1\otimes\Delta)R = R_{13}R_{12}$

$(\Delta\otimes 1)R = R_{13}R_{23}$

• $\theta\in U$: central, invertible

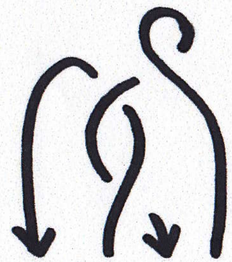
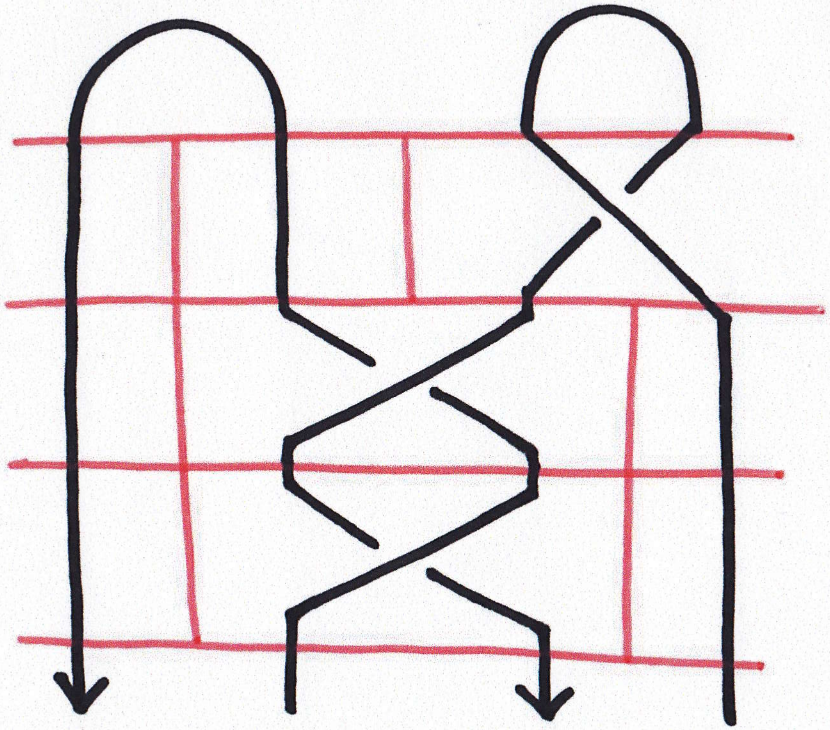
$\Delta(\theta) = (\theta\otimes\theta)(R_{21}R)^{-1}$

$S(\theta)=\theta,\ \varepsilon(\theta)=1$

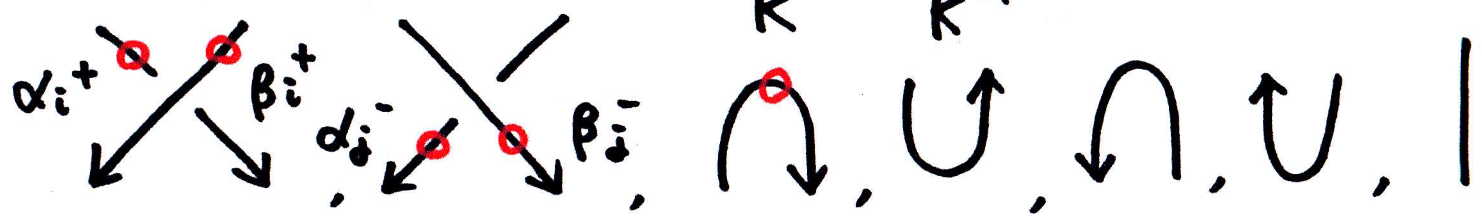
普遍sl_2不変量 J_T , $T=T_1\cup\cdots\cup T_n$: 底タングル

Step 1 T を ⤫, ⤪, $\cap$, $\cup$, $|$ から成る図式で表す.

〈例〉

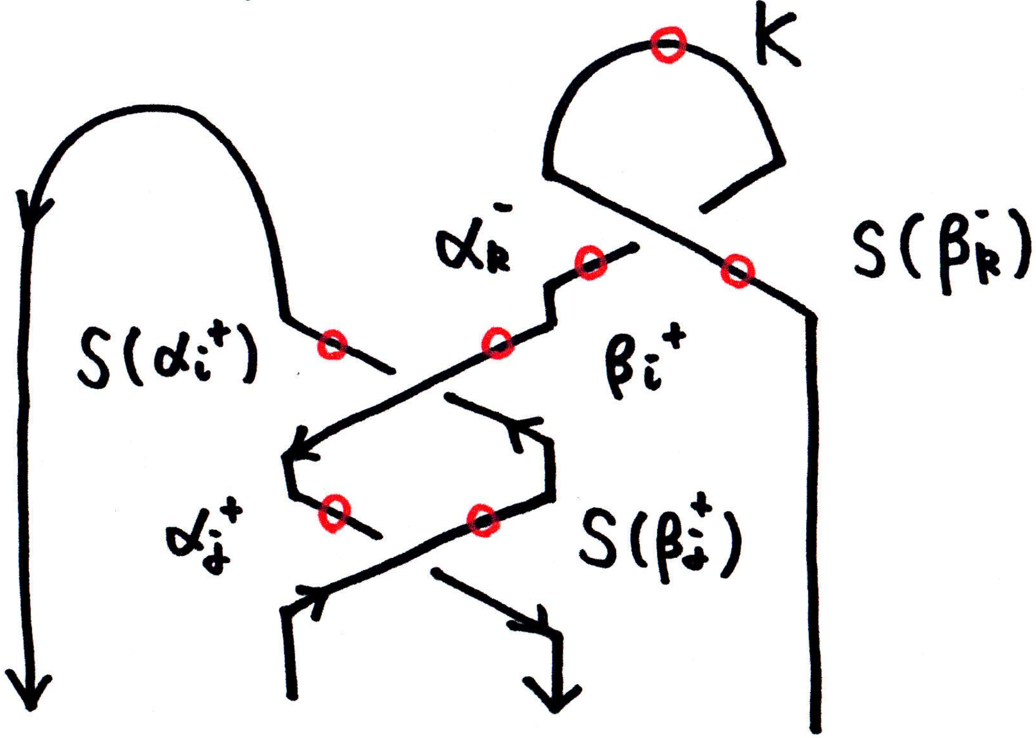
$T=$  $\rightsquigarrow$ 

Step2 各部分にラベルをつける. $\left(R^{\pm 1} = \sum_i \alpha_i^{\pm} \otimes \beta_i^{\pm}\right)$



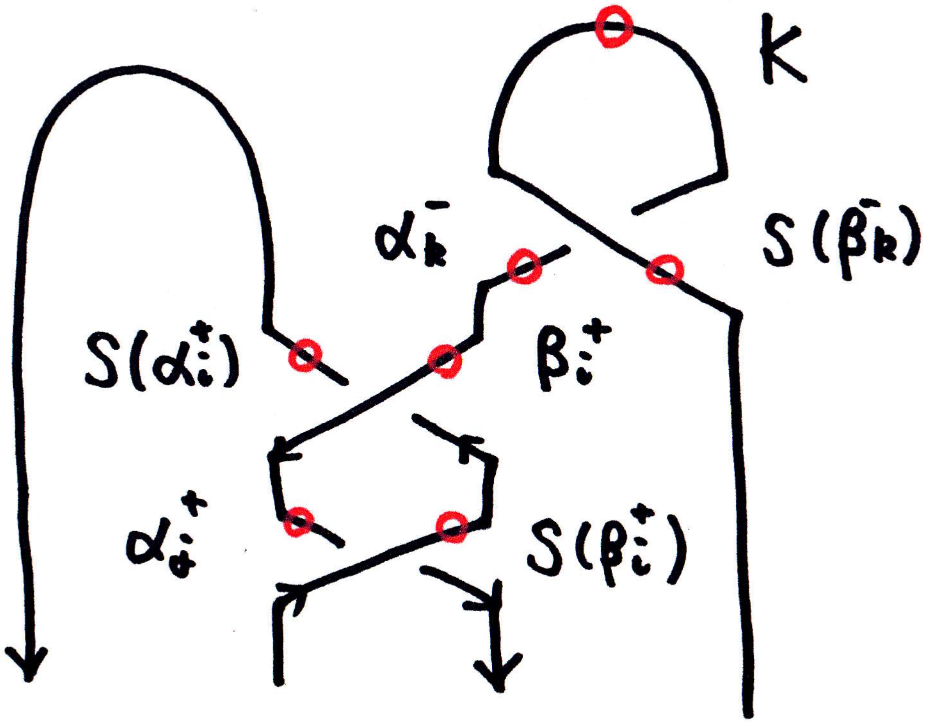
(ただし上向きのときS)

〈例〉



Step3 ひもを逆向きにたどりながらラベルを読み、順にテンソル積をとり、添え字について和をとる。

〈例〉



$$J_T = \sum_{i,j,k} S(\alpha_i^+)S(\beta_j^+) \otimes \alpha_j^+ \beta_i^+ \alpha_k^- K S(\beta_k^-) \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} 2}$$

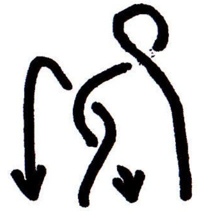
キゴウ

- $[i]_q = \dfrac{q^i - 1}{q - 1}$, $[i]_q! = [i]_q [i-1]_q \cdots [i]_q$,
- $e = (q^{1/2} - q^{-1/2})E$, $\tilde{F}^{(i)} = \dfrac{F^i K^i}{[i]_q!}$, $(i \geq 0)$
- $D = q^{\frac{1}{4} H \otimes H} = \exp\left(\dfrac{h}{4} H \otimes H\right)$

普遍R-行列

$$R = D\left(\sum_{n \geq 0} q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \tilde{F}^{(n)} K^{-n} \otimes e^n\right)$$

$$R^{-1} = D^{-1}\left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \tilde{F}^{(n)} \otimes K^{-n} e^n\right)$$

$J\Big($  $\Big)$

$$= \sum_{m,n,\ell \geq 0} (-1)^{m+n} q^{-\frac{1}{2}\ell(\ell-1)-n^2+2mn-3n\ell-2m\ell} \begin{bmatrix} n+\ell \\ n \end{bmatrix}_q$$

$$D^{-2}\left(1 \otimes q^{\frac{1}{4}H(H+2)}\right)\left(\tilde{F}^{(m)} K^{-2n} e^{n} \otimes \tilde{F}^{(n+\ell)} K^{2(n-m)} e^{\ell+m}\right)$$

(ただし $\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_q = \dfrac{[i]_q [i-1]_q \cdots [i-j+1]_q}{[j]_q!} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$

for $i \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0$)

$U_h(sl_2)$ の $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-部分代数

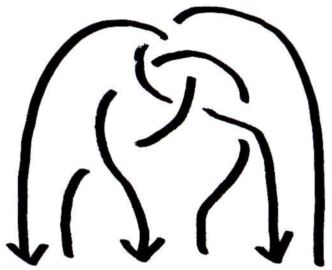
大	A	$K^{\pm 2},\ \tilde{F}^{(i)},\ \tilde{E}^{(i)} = \dfrac{(q^{-\frac{1}{2}}E)^i}{[i]_q!},\ i \geq 1$
	$\cup$	
	B	$K^{\pm 2},\ \tilde{F}^{(i)},\ e,\ i \geq 1$
	$\cup$	
小	C	$K^{\pm 2},\ f = (q-1)FK,\ e$

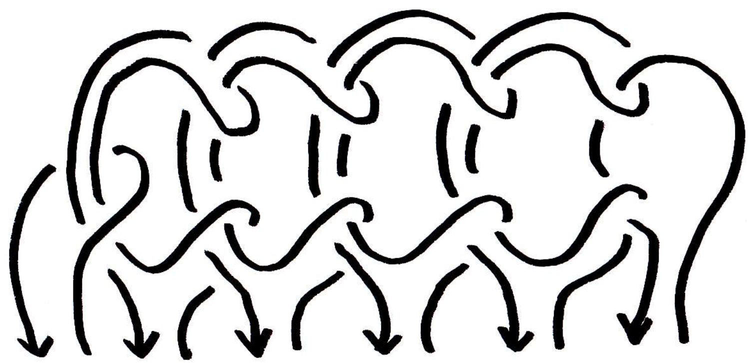
※ $A = U_{\mathbb{Z}q}^{ev}$, $B = \mathcal{U}_q^{ev}$, $C = \overline{U_q}^{ev}$

主結果

<u>定理</u> T : n≥3 成分
Brunnian 底タングル

$$\Rightarrow J_T \in \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ C^{\otimes i-1} \otimes A \otimes C^{\otimes n-i} \right\}^{\wedge}$$





まとめ　$(n \geq 3)$

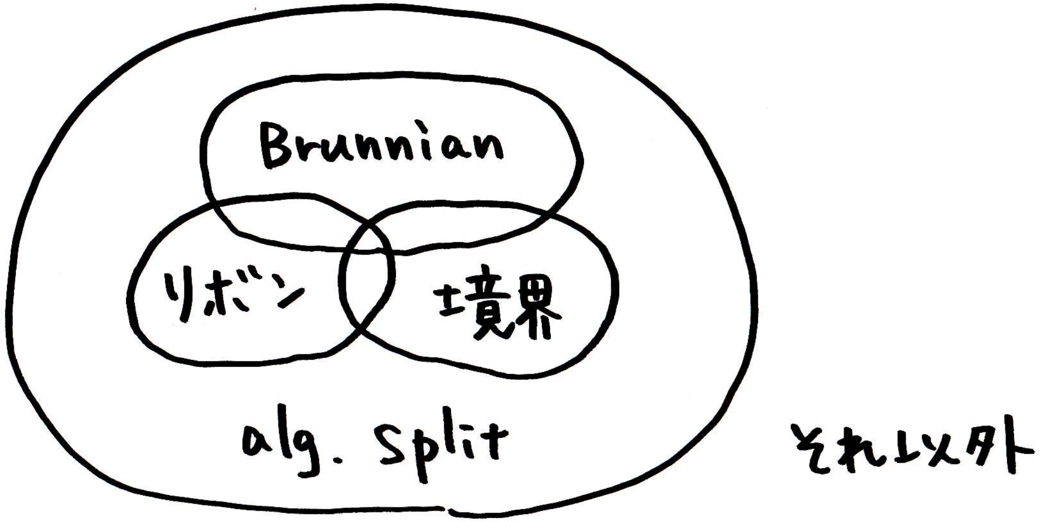
$$\{n\text{成分 alg. split 底タングル}\} \xrightarrow{J} \{B^{\otimes n}\}^{\wedge} \qquad (\text{Habiro})$$

$$\cup$$

$$\{\ 〃\ \text{Brunnian}\ 〃\ \} \xrightarrow{J} \bigcap_{i=1}^{n} \{C^{\otimes i-1} \otimes A \otimes C^{\otimes n-i}\}^{\wedge}$$

$$\cup$$

$$\{\ 〃\ \text{リボン or 境界}\ 〃\ \} \xrightarrow{J} \{C^{\otimes n}\}^{\wedge} \qquad (\text{S})$$



Milnor不変量に関する予想

予想1 T：すべてのMilnor不変量が消える
n成分底タングル

$$\Rightarrow \quad J_T \in \{C^{\otimes n}\}^{\wedge}$$

予想2 T：長さ i までのすべてのMilnor不変量
が消える n≥3成分底タングル

$$\Rightarrow \quad J_T \in \bigcap_{\sigma \in S_n} \{\sigma(C^{\otimes i} \otimes A^{\otimes n-i})\}^{\wedge}$$

〈例〉L：n成分 Brunnian 絡み目 $(n \geq 3)$

$J(L;\tilde{P}_1,\cdots,\tilde{P}_1) \in (q-1)^{n-2}(q+1)(q^2+q+1)\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$

$J(L;\tilde{P}_2,\cdots,\tilde{P}_2) \in (q-1)^{2(n-2)}(q+1)(q^2+q+1)(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$

$J(L;\tilde{P}_3,\cdots,\tilde{P}_3) \in (q-1)^{3(n-2)}(q+1)^{n-1}(q^2+q+1)(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$
$(q^2-q+1)(q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$

La : alg split , Lr.b : リボン or 境界

$J(L_a;\tilde{P}_1,\cdots,\tilde{P}_1) \in (q-1)(q+1)(q^2+q+1)\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$

$J(L_{r.b};\tilde{P}_1,\cdots,\tilde{P}_1) \in (q-1)^n(q+1)(q^2+q+1)\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$

※ $\tilde{P}_\ell = \dfrac{q^{\frac{1}{2}\ell}}{\{\ell\}_q!}\displaystyle\prod_{i=0}^{\ell-1}\left(V - q^{i+\frac{1}{2}} - q^{-i-\frac{1}{2}}\right)$ V : 2次元 キヤク表現