第2回（1/10）「四色問題」　ref.「四色問題」ロビン・ウィルソン，茂木健一郎訳

四色問題

4色あれば，どんな地図でも隣り合う国々が違う色になるように塗り分けることができるのか？

1852年：問題提起
ド・モルガンの手紙 → ウィリアム・ローワン・ハミルトン卿
（質問者：フレデリック・ガスリー，フランシス・ガスリー）

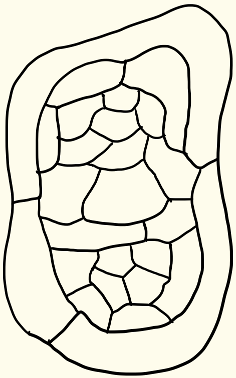
↓

1976年：ヴォルフガング・ハーケンとケネス・アッペルにより肯定的に解決．（コンピューター計算含む）

目次

1. 実験

配布した塗り絵を四色で塗ってみよう!

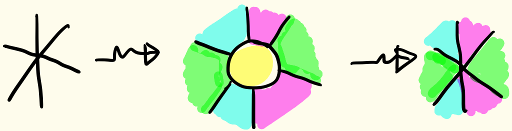


ルール ① 境界線で隣り合う2つの領域は違う色で塗る.

② 点で接する2つの領域は同じ色でもOK

Remark 1. 三枝地図だけ考えれば十分.

三枝地図 … すべての交点でちょうど三本の境界線が会している地図



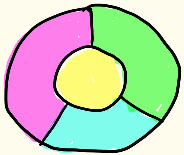
パッチをはる.　　パッチをとる.

↑

三枝地図

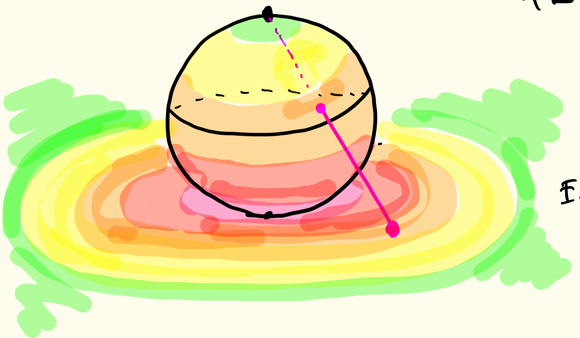
Remark 2

少なくとも四色は必要

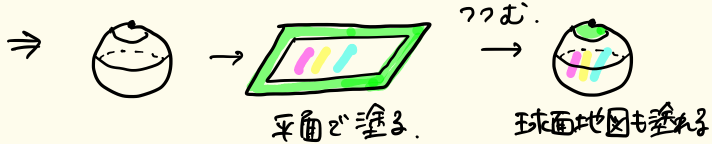


Remark 3. 球面地図の四色問題 $\overset{\text{同値}}{=}$ 平面地図の四色問題

S. Suzuki



平面地図が四色で塗れる

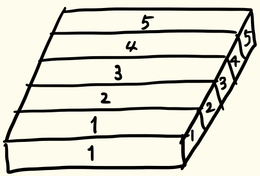


球面地図が四色で塗れる

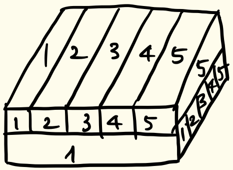
Remark 4 三次元への拡張… 三次元 $(\mathbb{R}^3)$ 領域のどんな領域分割でも塗り分ける色の最小数は存在しない。

五色必要な例 (n色でも同様)

1から5までの数字のついた棒を横に並べる

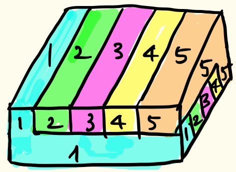


この上に同じ物を90°回転して置く。

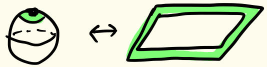


同じ数字を同じ領域とみなす

コレ五色必要。



2. オイラー標数と四色問題



オイラーの多面体公式 (1750)

Tを多面体とし、
$$\begin{cases} F : \text{Tの面の数} \\ E : \text{Tの辺の数} \\ V : \text{Tの頂点の数} \end{cases}$$
とすると、$F - E + V = 2$ が成り立つ。

$\xrightarrow{\text{地図バージョン}}$

Tを平面地図とする。
$$\begin{cases} F : \text{Tの面の数（外部領域含む）} \\ E : \text{Tの辺の数} \\ V : \text{Tの頂点の数} \end{cases}$$
とすると、$F - E + V = 2$ が成り立つ。

定理1 (隣国は5つだけ定理)

どんな地図にも、
5個以下の隣国しか持たない
国が少なくとも1つは存在する。

(証明：レポート？)

ヒント：(背理法) すべての国が6個以上の隣国を持つとする。

地図の(面、辺、頂点)の数を(F, E, V)とおく。

- ひとつの頂点に集まる辺は3本以上
  $\Rightarrow E \geq \frac{3}{2} V$ (╋ ← こういうのは考えないから)
- ひとつの面の境界になる辺は6本以上。
  $\Rightarrow E \geq \frac{6}{2} F$ (背理法の仮定)

S. Suzuki ⑤

数え上げの公式

ここからは三枝地図のみ考える。

地図の中に、n個の隣国を持つ国がC_n個あるとする。（地図の（面、辺、頂点）の数を(F, E, V)とおく）

$$\Rightarrow \begin{cases} F = C_2 + C_3 + C_4 + \cdots, \\ 2E = 2C_2 + 3C_3 + 4C_3 + \cdots \\ 3V = 2C_2 + 3C_3 + 4C_3 + \cdots \end{cases}$$

これをオイラーの公式に代入すると

$$\begin{aligned} 2 = F - E + V = {} & C_2 + C_3 + C_4 + \cdots + C_n + \cdots \\ & - \left(C_2 + \tfrac{3}{2}C_3 + \tfrac{4}{2}C_4 + \cdots + \tfrac{n}{2}C_n + \cdots \right) \\ & + \left(\tfrac{2}{3}C_2 + \tfrac{3}{3}C_3 + \tfrac{4}{3}C_4 + \cdots + \tfrac{n}{3}C_n + \cdots \right) \\ = {} & \tfrac{2}{3}C_2 + \tfrac{1}{2}C_3 + \tfrac{1}{3}C_4 + \tfrac{1}{6}C_5 + 0C_6 - \tfrac{1}{6}C_7 \cdots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 12 = 4C_2 + 3C_3 + 2C_4 + C_5 - C_7 - 2C_8 - 3C_9 - \cdots$$

これだけで分かるコト

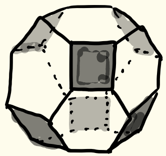
Ⓐ 定理1の別証明

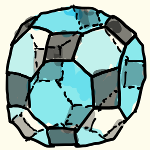
Ⓑ 五角形と六角形のみの多面体 ⇒ 五角形は12個！

Ⓒ 四角形と六角形のみの多面体 ⇒ 四角形は6個！

Ⓓ 四角形と六角形と八角形のみの多面体 ⇒ 四角形の数 = 八角形の数 + 6

例えば





3. 四色問題 v.s. 数学的帰納法

数学的帰納法で四色問題を示せるか？

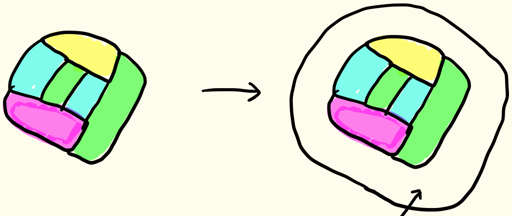
n個の国を持つ地図が4色で塗れるとする。

このとき n+1個の国を持つ地図も

4色で塗れることを示せ。

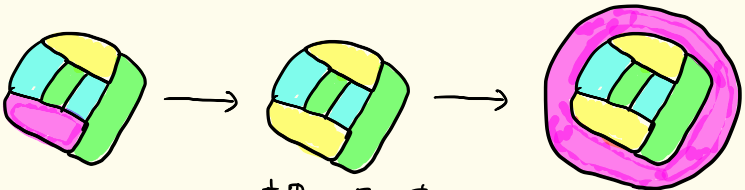
考察：n個の国の色をそのままに n+1個目の国を塗ることはできないコトがある。

例



n+1個目が塗れない。

ちょっと修正する

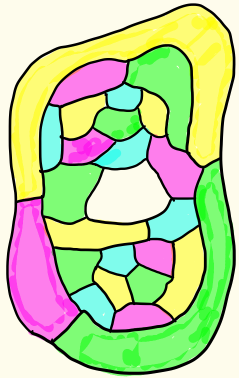


境界を3色にする。

難

いつでも修正できるか？

（一般的なアルゴリズムを見つけられるか？）



色分けを修正して

左の？まで入れて

4色で塗るには？

4. 最小反例と可約配置

背理法で四色問題を示せるか？

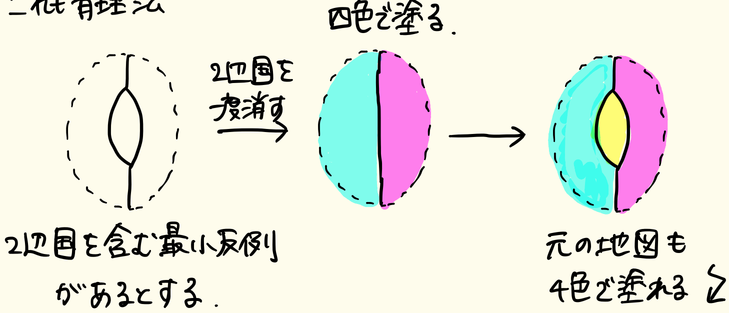
5色ないと塗り分けられない地図があるとする。

この時、そのような地図の中で国の数が

最小のもの（最小反例）をとる。すると…？

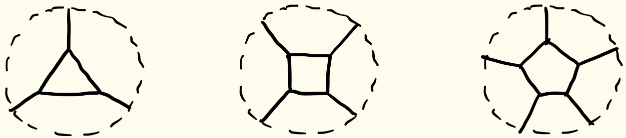
考察：最小反例は2辺国を含まない。

これも背理法



最小反例に含まれないような国々の配置のことを**可約配置**という。

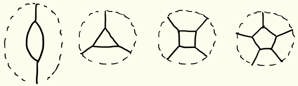
問：次の配置が可約配置かどうか判定せよ。



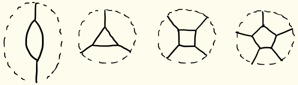
(i)　(ii)　(iii)

前ページの (i) (ii) (iii) がすべて可約なら

隣国は5つだけ定理と合わせると四色問題が示される。

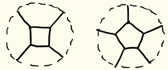
すべての地図は  を少なくとも1つ含む。

つまり最小反例にも1つは含まれる。

これは  が可約配置であることに矛盾。

よって最小反例は存在しない。

BUT!

 の可約性が簡単には分からない。

オシイ!!

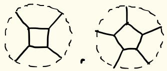
同じ考察から次は言える。

六色定理

6色あればどんな地図でも隣り合う国々が違う色になるように塗り分けることができる。

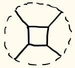
5. ケンプの間違った証明

アルフレッド・ブレイ・ケンプは

 が可約配置であることを

「ケンプの鎖」を用いて次のように示そうとした。 (1879)

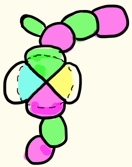
(この証明は11年間正しいとされた後、ハーシー・ヘイウッドにより間違いを指摘された。)

 が可約であること

1.  を4色で塗る。

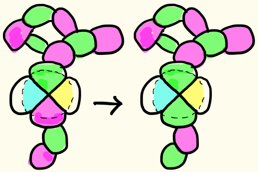
これだと四辺国を復元できない。
この4色を3色に減らせればOK.

2. 上と下につながっている緑と赤の国々の鎖に注目する。



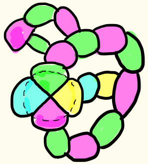
ケース1

上と下の鎖がつながっていない場合,
どちらかの鎖で緑と赤をスイッチ。

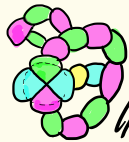


ケース2

上と下の鎖がつながっている場合,今度は左と右で鎖をつくる。



すると右と左の青黄鎖は緑赤の鎖に阻まれて
つながることができない。
↓
右か左どちらかの鎖で青と黄をスイッチ



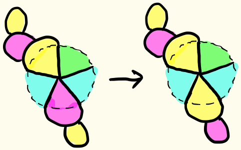
 が可約であること (間違いを探せ!)

1.  を4色で塗る。  これを3色に減らせばOK.

2. 鎖に注目して塗り直す。

ケース1.

黄-赤の鎖が上下で
つながっていなければ
どちらかを塗りかえて
3色にできる。

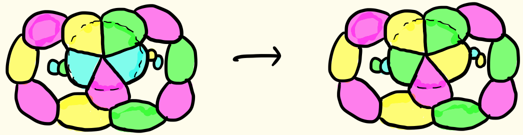


ケース2

緑-赤の鎖が上下でつながっていないとき同様。

ケース3

黄-赤も緑-赤もどちらもつながっているとき.



3色!!

両方スイッチする。

左の青につながる緑-青鎖と
右の青につながる黄-青鎖はつながらない。

類似の考察から次は言える。

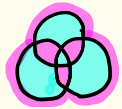
五色定理

5色あればどんな地図でも隣り合う国々が違う色になるように塗り分けることができる。

ケンプの備考.

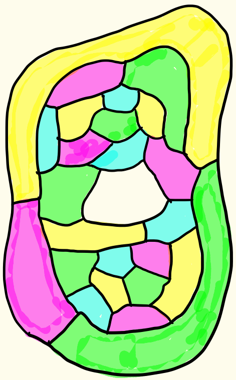
1. 三枝地図のすべての国が偶数個の隣国を持つならば地図は3色で塗れる。

2. すべての交点で偶数本の境界線が会している地図は2色で塗れる。



Q: ケンプの証明はどこが間違っていた？

反例



Q. もっと簡単な反例を構成せよ。

(国の数が少ない)

6. テイトの言い換え

四色問題

4色あれば、どんな三枝地図でも隣り合う国々が違う色になるように塗り分けることができる。

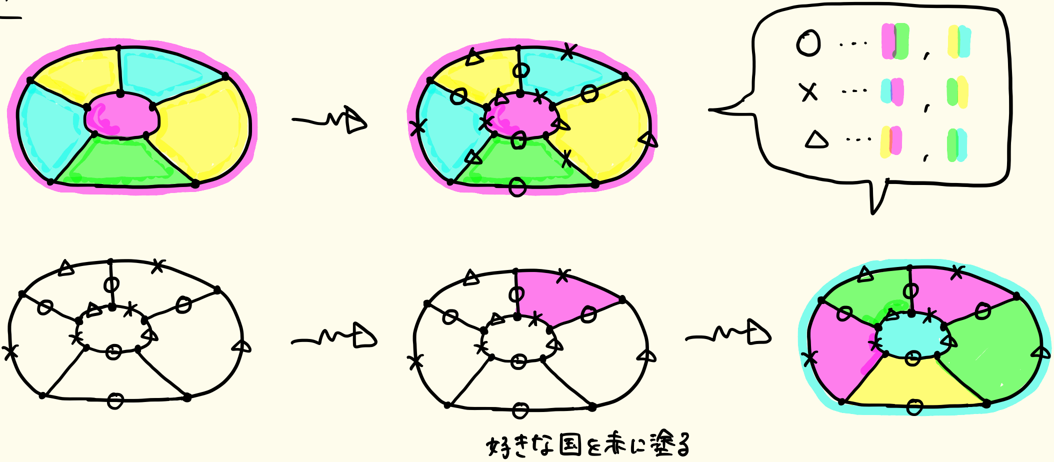
⇔ テイト (1880)

三枝地図の境界線を塗り分けるとき、3色あれば同じ色の境界線が端点を共有しないようにできる。

← ゲージ理論

← リー環

対応関係



7. 種数と四色問題

地図の塗り分け定理 $(g \geq 1)$

g個の穴があいている閉曲面上に描かれた任意の地図は

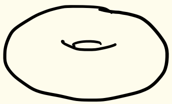
$$H(g) = \left[\frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{1+48g}\right)\right]$$

色で塗り分けられる。(ヘイウッド 1890)

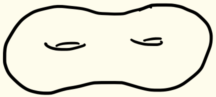
塗り分けるのに$H(g)$色必要なg個穴あき閉曲面上の地図が存在する。

(リンゲル、ヤングス 1968)

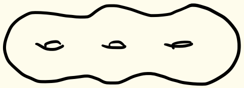
ただし
$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$



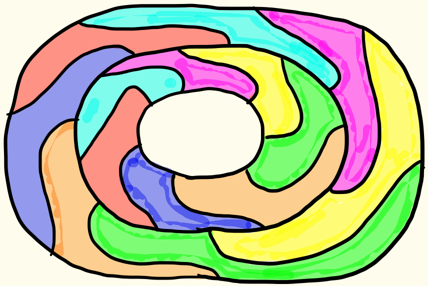
: $H(1) = 7$



: $H(2) = 8$



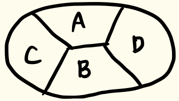
: $H(3) = 9$



$g=1$の場合はここまでの議論の応用で証明できる。

地図の塗り分け定理が$g=0$に適用できれば四色問題が解ける。

8. 染色多項式（地図は三枚）

例. $T =$ 

バーコフ(1912)

任意の地図をλ色で塗り分ける方法の数はλの多項式として表せる。

= 染色多項式 P

Tの A.B.C.D をλ色で塗り分ける方法.

$$P_T(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$
$$= \lambda^4 - 5\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda$$

任意の地図の染色多項式の係数の符号は交互に正負になっている。(バーコフ)

(バーコフ, ルイス)

Tをn個の国からなる地図, λを4ではない正の数とする。

このとき

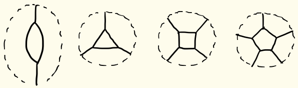
$$P_T(\lambda) \geqq \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)^{n-3}$$

$\lambda=4$ のときに適用できたら四色問題が解けていた。

9. 不可避集合と放電法 (地図は三枚)

不可避集合

地図を描く上で避けることのできない形の集合

例: {  }

四色問題の証明の方針.

不可避集合であって、その要素がすべて可約配置であるものを見つける。

⇒ 最小反例が可約配置を含む。

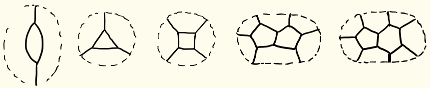
⇒ 四色問題が従う。

不可避集合を見つける。

例)

ヴェルニッケ (1903)

次の集合は不可避集合:

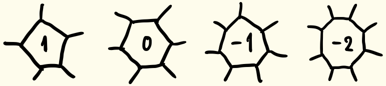
V= {  }

(背理法): Vに含まれる形を1つも持たない地図Tがあるとする。

するとTは2,3,4辺国を含まないから5辺国を含み、それは少なくとも7辺を境界にもつ国と接している。) — ★

(放電法)

- 5辺国に1の電荷
- 6辺国に0の電荷
- 7辺国に−1の電荷
- ⋮
- n辺国に $-n+6$ の電荷を置く。



C_nをTに含まれるn辺国の数とすると、
地図中の電荷の総和は

$$C_5 - C_7 - 2C_8 - 3C_9 - \cdots$$

一方、数え上げの公式から

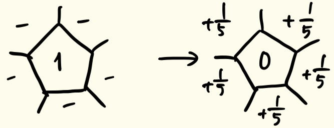
$$4C_2 + 3C_3 + 2C_4 + C_5 - C_7 - 2C_8 - 3C_9 - \cdots = 12$$

だった。Tは $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ より

$$C_5 - C_7 - 2C_8 - 3C_9 - \cdots = 12$$

となり、電荷の総和が12であることが従う。

<u>放電</u>：電荷の総和を保ちながら電荷を移動する。



すべての5辺国の電荷1を5個の隣国に$\frac{1}{5}$ずつ分ける。

★より、放電後はすべての国の電荷が0もしくは負になり、これは電荷の総和が12であることに矛盾。//

(例えば7辺国の電荷−1が放電後正になるには、少なくとも5個の5辺国に囲まれる必要がある。)

(これ＋12個の5角形からなる地図が四色で塗れるという事実より、最小反例は国を13個以上含むことがわかる。)

そしてかくかくしかじかで

ケネス・アッペルとヴォルフガング・ハーケン (1976)

可約配置から成る不可避集合を構成！

(1405個の可約配置)