2009. 2/6 ~ 2/9. けいはんなセミナー

結び目理論

鈴木咲衣

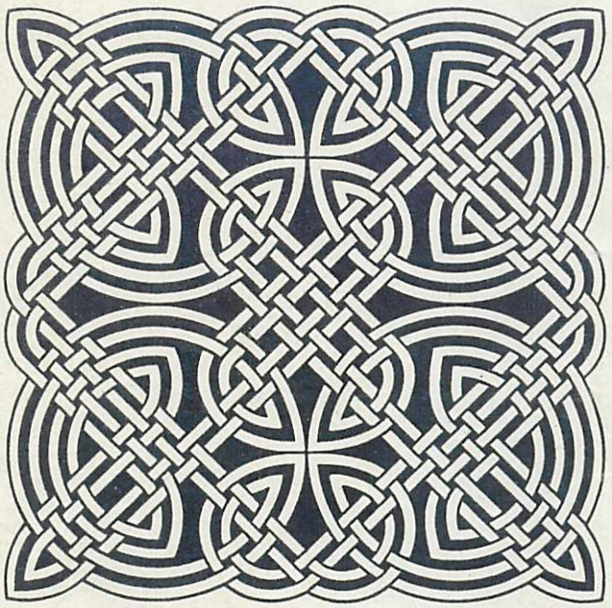
5、動物組紐文様　ケルズの書

ケルズの書は、ケルト三大装飾写本のひとつであり、豪華な装飾文字が特徴。装飾的要素を媒体とした"聖なる世界"を展開している。

↑

アイルランド. 8世紀

7世紀 →



6、7、組紐文様　ダロウの書

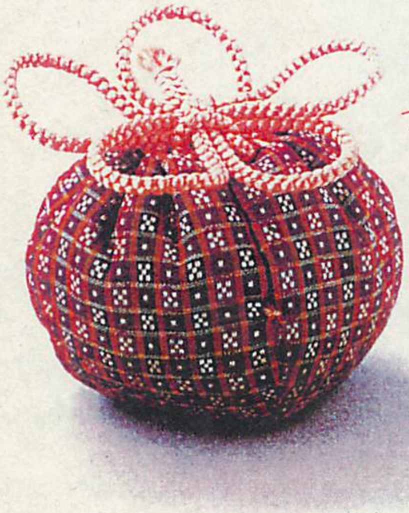
①

7, 5, 8

変形に対して不変

作り出す

creative



同相,

Htの準備

②

③

① 中国結び目　(中国, 漢~)

② 花結び　(日本, 平安時代~)

③ 神社結び　(岡崎天満宮)

テーマ：勉強から研究へ

1. 研究対象を決める。

幅広く勉強して
'好きな' テーマを見つける。

2. 問題提起

たくさん考えてアタックする。
「10個考えて 1~2個ものになれば
良い方だ」 by 大槻先生

(3. 研究方法の確立)

4の研究に
集中しがちだけど、
意外と大切。

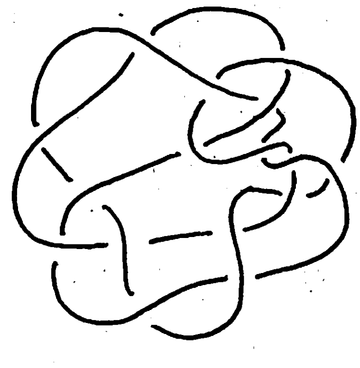
4. 研究

ねばり強く考える。
本気になると夢の中でも
考えている。zzz…

注) 順番はこの通りとは限らない。
行ったり来たりをくり返す

今日の話

1. 結び目
2. 不変量とは
3. 図式
4. 不変量の計算



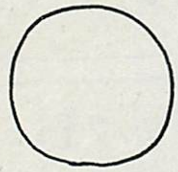
この結び目はほどける??
[4] より。

1. 研究対象（結び目）

〈結び目の例〉

鏡像

1

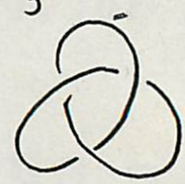


自明な結び目 K_0

2

3つ葉結び目 K_{31}

3



$\overline{K}_{31}$

4

8の字結び目 K_{41}

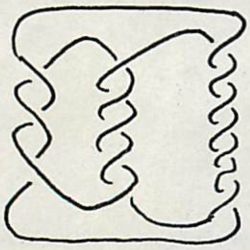
5

K_{51}

6

K_{61}

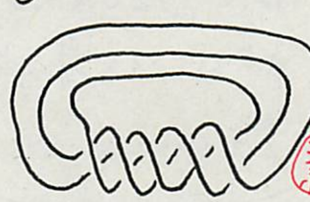
7



素

(−3.5.7) プレッツェル結び目

8

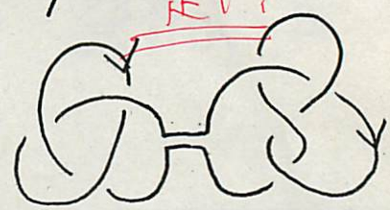


素

(3.5) トーラス結び目

9

定まり!



連結和 $K_{31} \# K_{41}$

豆 連結和について　　K, K', K'' : 向きつき結び目

- $K \# K_0 = K$　　・$(K \# K') \# K'' = K \# (K' \# K'')$
- (K_0 : 単位元 に対して) 逆元は存在しない。
- $K = K' \# K'' \Rightarrow K' = K_0$ or $K'' = K_0$ となるとき、

Kを'素な結び目'という。(K_0除く)　　任意自然数 素数 積

任意の結び目はいくつかの素な結び目の連結和として

"一意的に" 表すことができる。(K_0除く)　$K = \underbrace{K_1 \# K_2 \# K_3 \# \cdots \# K_n}_{\text{順番を除いて一意的}}$

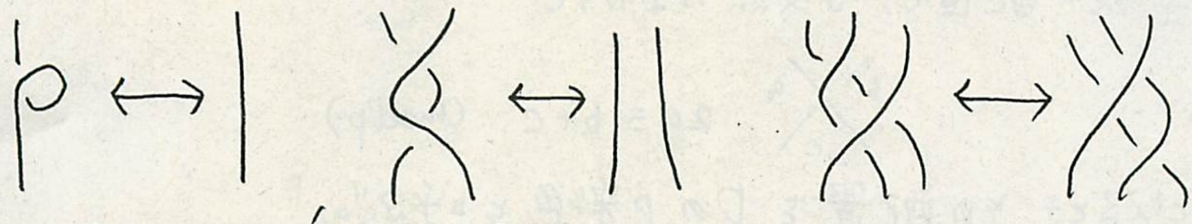
!!

3. 研究方法の確立（図式）

曲面を多面体近似
⇒有限パターン

・Reidemeister 移動

isotopyの離散化

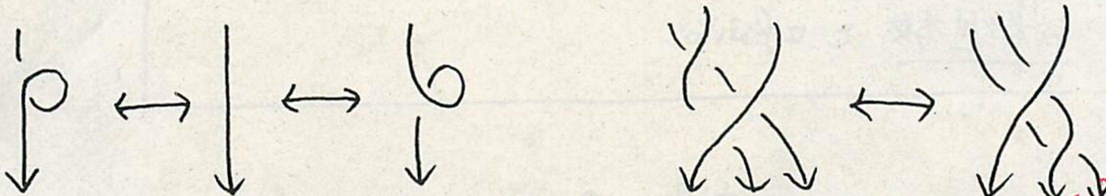


RI　　RII　　RIII

図式 (Diagram)

IFの情報…2⁸

・向きつき Reidemeister 移動

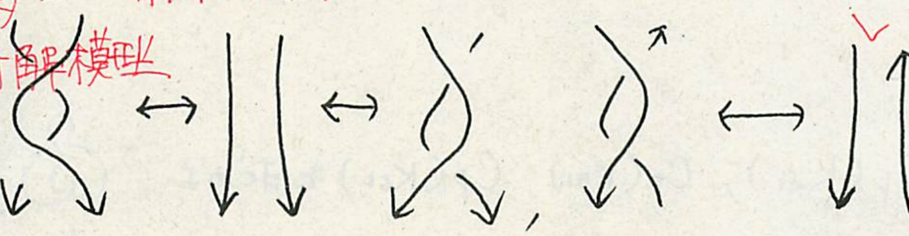


$\overrightarrow{RI}$　　$\overrightarrow{RIII}$

{閉曲面}/~ → $\mathbb{Z}_{20}$

よく知られている集合に全単射をつくる

ヤン・バクスター
統計物理
2次元可解模型



$\overrightarrow{RII}$

Diagram.
離散化.

$A = -q^{-\frac{1}{2}}$

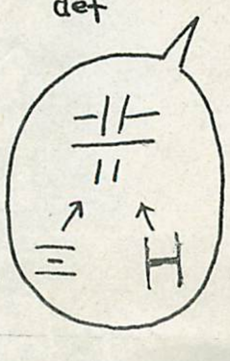
豆　n成分リボン絡み目

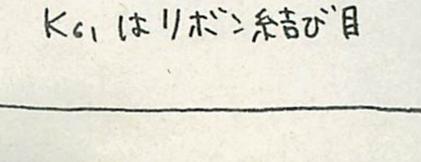
D: Lの図式
$f(L) := f(D)$

$\underset{def}{\Leftrightarrow}$ 'リボン型' 自己交差のみを許すはめ込み

$D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_n \looparrowright \mathbb{R}^3$

の像の境界となる絡み目.

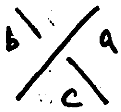




K_{61} はリボン結び目

4. 研究（p彩色数） $p \geq 1$

・結び目図式 D の各弧に対して 0 以上 $p-1$ 以下の整数を配置し，各交点のまわりで



$$2a \equiv b+c \pmod{p}$$

となるとき，その配置を D の p 彩色と呼ぶ。

定義 C_p : {結び目図式} $\longrightarrow$ $\{1, 2, 3, \cdots\}$ s.t.

$$C_p(D) := \frac{1}{p} \times (\text{図式}D\text{の}p\text{彩色の個数})$$

を <u>p彩色数</u> と呼ぶ。

Q1　C_p は結び目の不変量か？

Q2.　$C_p(K_{41})$，$C_p(K_{51})$，$C_p(K_{61})$ を求めよ．

K_{41}　K_{51}　K_{61}

Q3　K：結び目．　$C_p(K)$ と $C_p(\overline{K})$ との関係は？　（$\overline{K}$：Kの鏡像）

p	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_{31}	1	3	1	1	3	1	1	3	1
K_{41}				5					5
K_{51}				5					5
K_{61}		3			3			9	

p彩色数 $C_p(K)$ の値（詳しくは[3]参照）

豆1　$C_p((-3.5.7)$ プレッツェル結び目$) = 1$　$(\forall p \geq 1)$

⇒　p彩色数は $(-3.5.7)$ プレッツェル結び目と自明な結び目を区別できない！

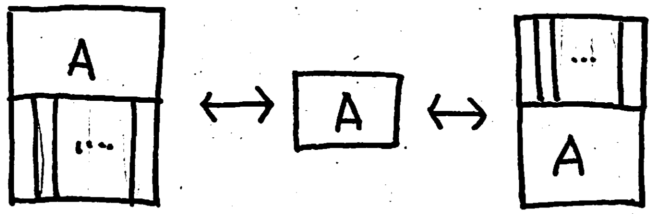
豆2　3次元球面のKで分岐する2重分岐被覆空間 $M_2(K)$ の1次のホモロジー群をもちいて、p彩色数は

$$C_p(K) = (\text{準同型 } H_1(M_2(K)) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ の個数})$$

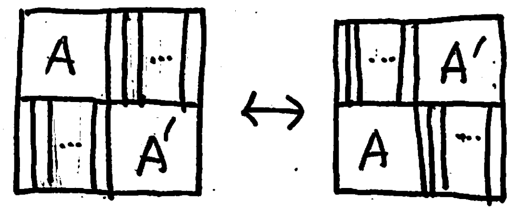
と表される。

4. 研究（Jones多項式）

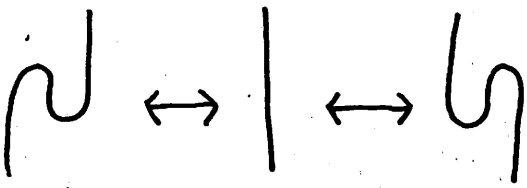
- Turaev 移動



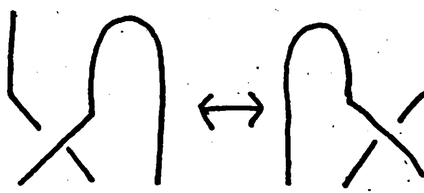
T_0



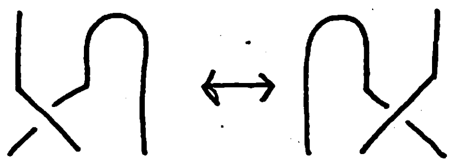
T_0'



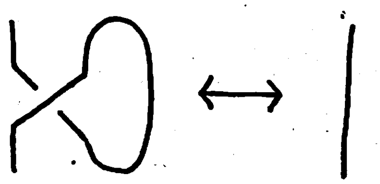
TI



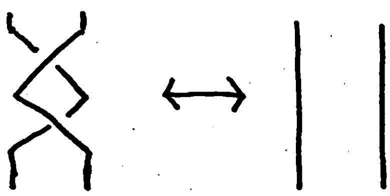
TII



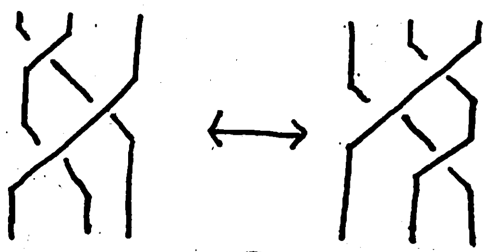
TIII



RI

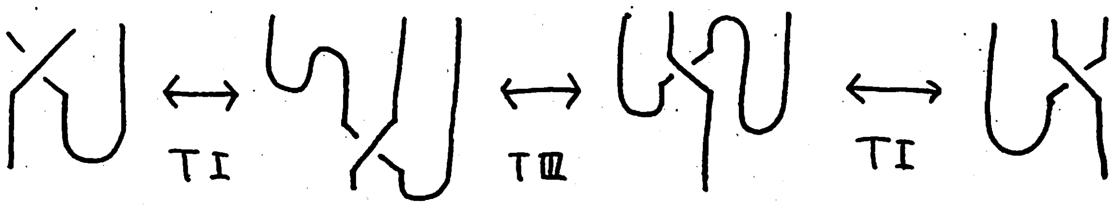


RII



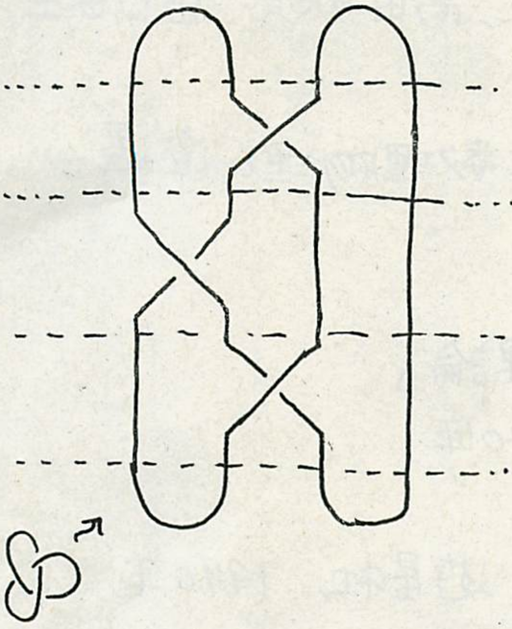
RIII

注)



V：有限次元線形空間 over $\mathbb{C}$

$\bar{f}_V$ ：{絡み目} $\to \mathbb{C}$



$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\simeq\mathbb{C} \arrow[d, "n\otimes n"] & \mathbb{C} \arrow[ddddd, "\bar{f}_V(\ )"] \\
V\otimes V\otimes V\otimes V \arrow[d, "id_V\otimes R_+\otimes id_V"] & \\
V\otimes V\otimes V\otimes V \arrow[d, "R_-\otimes id_V\otimes id_V"] & \\
V\otimes V\otimes V\otimes V \arrow[d, "id_V\otimes R_+\otimes id_V"] & \\
V\otimes V\otimes V\otimes V \arrow[d, "u\otimes u"] & \\
\mathbb{C} & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

問：$\bar{f}_V$ が絡み目の不変量になるための条件は？

- T_0, T_0' での不変性 … $f_V(1) = id_V$ より ok.
- TI … $(id_V\otimes u)(n\otimes id_V) = id_V = (u\otimes id_V)(id_V\otimes n)$
- TII … $(R_+\otimes id_V)(id_V\otimes n) = (id_V\otimes R_-)(n\otimes id_V)$
- TIII … $(R_-\otimes id_V)(id_V\otimes n) = (id_V\otimes R_+)(n\otimes id_V)$
- RI … $(id_V\otimes u)(R_+\otimes id_V)(id_V\otimes n) = id_V$
- RII … $R_-R_+ = id_{V\otimes V}$
- RIII … $(R_+\otimes id_V)(id_V\otimes R_+)(R_+\otimes id_V) = (id_V\otimes R_+)(R_+\otimes id_V)(id_V\otimes R_+)$

参考文献

[1] 大槻知忠（編著），大山淑之，高田敏恵，出口哲生，
村上順，和久井道久（著）
「量子不変量 3次元トポロジーと数理物理の遭遇」，
日本評論社，1999年．

[2] 河内明夫（編著），「結び目理論」，
シュプリンガー・フェアラーク東京，1990年．

[3] 村上斉，「結び目のはなし」，遊星社，1990年．

[4] 村上順，「結び目と量子群」，朝倉書店，2000年．

[5] Ohtsuki, T., Quantum invariants — A study of knots,
3-manifolds, and their sets,
Series on Knots and Everything, 29.
World Scientific Publishing Co., Inc., 2002.

フロレッツツェル
トーラス
素数？

・Jones $A^2 = q^{-\frac{1}{2}}$
ナゼ？

$\langle \ \rangle = (A^7 - A^3 - A^{-5})(-A^2 - A^{-2})$

$V(\ ) = (-q^{-4} + q^{-3} + q^{-1})(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}})$

$\langle \ \rangle = (-A^4 - A^{-4})(-A^2 - A^{-2})$

1987 Drinfel'd Jimbo.

$\begin{pmatrix} A & & & \\ & & A^{-1} & \\ & A^{-1} & A-A^{-3} & \\ & & & A \end{pmatrix}$ $u = (0, A, -A^{-1}, 0)$ $n = \begin{pmatrix} 0 \\ -A \\ A^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$