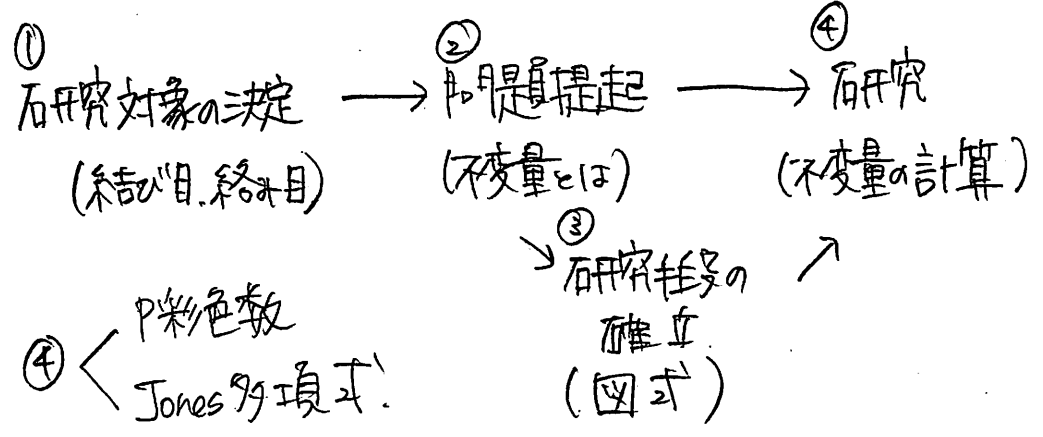


0. 結び目のお話

1. 数学の語 “勉強から研究へ”



結び目... $\left\{ \begin{array}{l} \text{装飾用} \\ \text{まじない, 守り} \\ \text{實用} \\ \text{DNA, FISH検査} \end{array} \right.$

単純に「何と不思議
 鬼魅的的存在

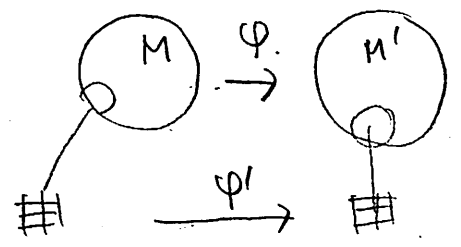
↑
 数学の立場から
解き出す!

1. 研究対象

Def. $M, M': C^\infty$ 多様体 α $\left\{ \begin{array}{l} \text{なめらかな図形, 空間} \\ \text{どこでも好きな所に} \\ \text{局所的な座標を付けるような} \\ \text{空間} \end{array} \right.$

$\varphi: M \rightarrow M'$ C^∞ 級微分同相写像 \rightarrow

def. φ : 全単射, $\varphi, \varphi^{-1}: C^\infty$ 級



Def

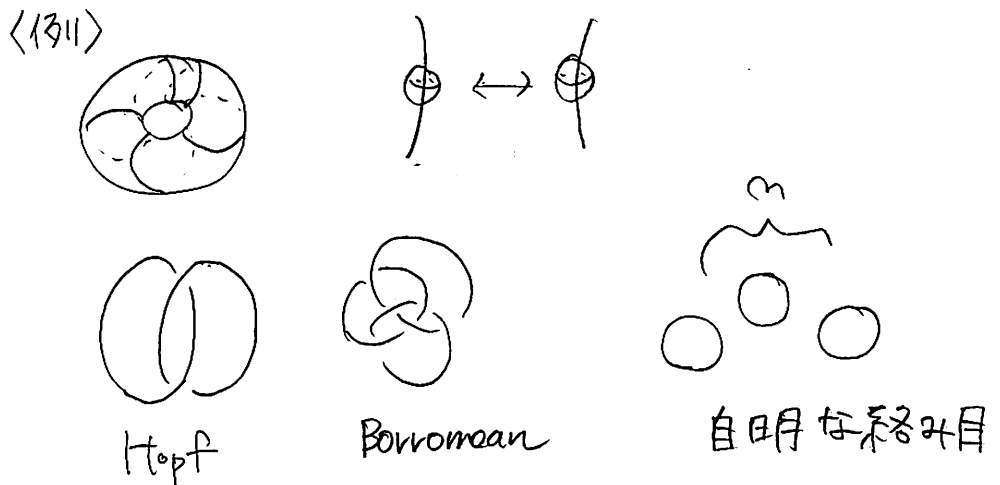
結び目... C^∞ の Δ $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ の像 \circlearrowright
 (knot)

n 成分絡み目... $S^1 \cup \dots \cup S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ \circlearrowright
 (link)

同値関係 (isotopic)

$L \sim L' \iff L \text{ と } L' \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ の連続変形(どうり)で変換}$
 ambient isotopy.
 $\{ H_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid t \in [0, 1] \}$
 s.t. $H_0 = \text{id.}, H_1(L) = L'$

研究対象 絡み目 / $\sim_{\mathbb{R}^3}$



2. 問題提起.

・絡み目を分類せよ。

$f: \{\text{絡み目}\} \rightarrow I$
 $L \neq L' \Rightarrow f(L) \neq f(L')$

Def $f: \{\text{絡み目}\} \rightarrow I$ Set {A, B, O, AB} $\mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$

は $L \sim_{\mathbb{R}^3} L' \Rightarrow f(L) = f(L')$ のとき

絡み目の不変量 と呼ばれる。

特に $L \sim_{\mathbb{R}^3} L' \Leftrightarrow f(L) = f(L')$ のとき

f は 完全不変量 と呼ばれる。

不変量を探せ!

Step 1. $f: \{\text{絡み目}\} \rightarrow I$ Set $\mathbb{Z} < \mathbb{R}$

Step 2. $L \sim_{\mathbb{R}^3} L' \Rightarrow f(L) = f(L')$ を確かめよ。

見つけたら

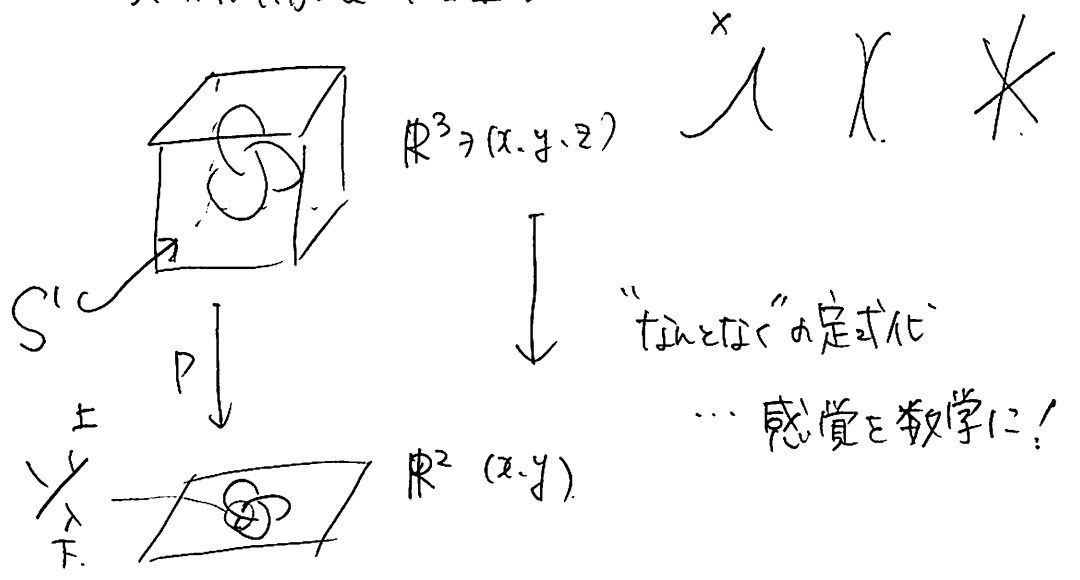
Q どれくらい精密か

Q 他の不変量との関係性は?

Q 具体的な考察

⋮

3. 研究方法の確立.

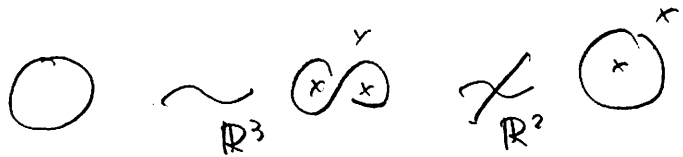
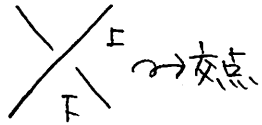


Def. 図式 (diagram) とは

C^∞ の写像 $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ s.t.

自己交差は有限個の横断的2重点のみ.

の像で, 2重点に "上" "下" の情報を入力したもの

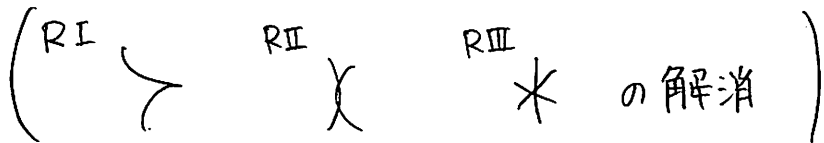


Th (Reidemeister)

$D, D':$ 図式

$L \sim_{\mathbb{R}^2} L' \iff D \text{ と } D' \text{ は } \sim_{\mathbb{R}^2} \text{ と RI, RII, RIII}$

のくり返して得られる。 ($D \sim D'$)



注). $\forall L:$ 絡み目 $\exists D:$ 図式 s.t. $p(L) = D$.

$\forall D:$ 図式 $\exists L:$ 絡み目 s.t. $p(L) = D$

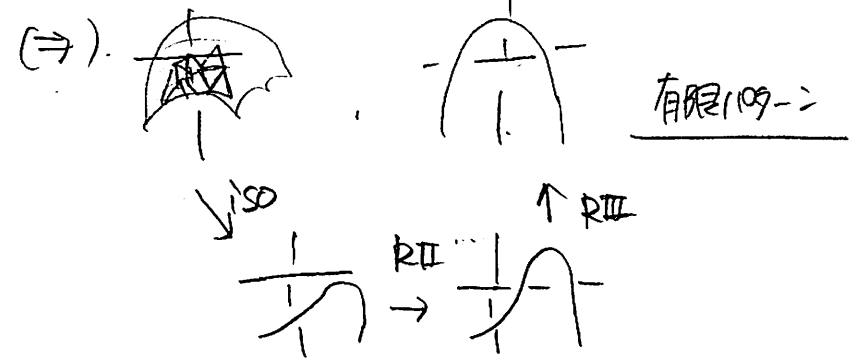
(特に isotopy 類は一貫的)

同値関係

isotopic $D, D':$ 図式

$D \sim_{\mathbb{R}^2} D' \iff D \text{ と } D' \text{ は } \mathbb{R}^2 \text{ の連続変形で "すり合う" ambient isotopy.}$

(\Leftarrow) 明らか.



Step 1

Def $C_p: \{\text{図式}\} \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ s.t.

$$C_p(D) := \frac{1}{p} (D \text{ の } p \text{ 彩色の回数})$$

Σ 図式 D の p 彩色数と n 。

$$RI \dots C_p(\text{①}) = C_p(\text{②})$$



$$\# \{ \text{① の } p \text{ 彩色} \} = \# \{ M \text{ の } a=b \text{ と } a \neq b \text{ の } \}$$

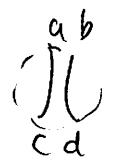
$M = \{ \text{② 外側の } p \text{ 彩色} \}$

$$\# \{ \text{②} \dots \} = \begin{matrix} 2b \equiv a+b \\ a=b \end{matrix} \quad \text{OK.}$$

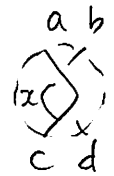
Step 2 $D \approx D' \Rightarrow C_p(D) = C_p(D')$?

isotopy of \mathbb{R}^2 での不変性 ... OK

RII.



$$\begin{matrix} a=c \\ b=d \end{matrix}$$



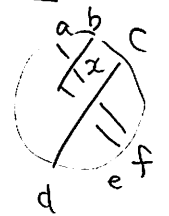
$$a=c$$

$$x = 2a - b$$

$$d = 2c - x = 2c - (2a - b) = b$$

OK.

RIII

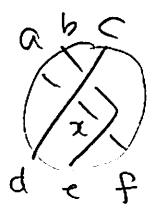


$$x = 2b - a$$

$$f = 2c - x = 2c - 2b + a$$

$$e = 2c - b$$

$$d = c$$



$$e = 2c - b$$

$$f = 2e - x$$

$$= 2e - (2c - a)$$

$$= 2b - a$$

$$d = c$$

4 研究

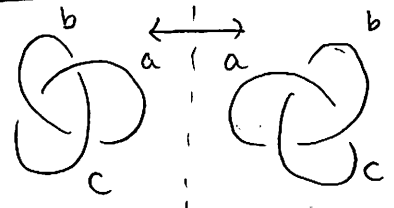
Jones の 項式 ... 1985 V.F.R. Jones

• Kauffman の 項式 ... 1987. Kauffman

• HOMFLY の 項式 ... 1985. HOMFLY.

• 量子不変量 ... 1988 ~ Reshetikhin Turaev.

鏡像



$$C_p(K) = C_p(\bar{K})$$

Kauffman 括弧

$\langle 131 \rangle$

Def: 次数定数 $\langle \rangle: \{\text{図式}\} \rightarrow \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$

\in Kauffman 括弧とす

(\cdot) の外側は
同じ絡み目.

$$\begin{cases} \langle \text{X} \rangle = A \langle \text{D} \rangle + A^{-1} \langle \text{D}' \rangle \\ \langle OD \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle \\ \langle \emptyset \rangle = 1. \end{cases}$$

Q. $D \sim D' \Rightarrow \langle D \rangle = \langle D' \rangle$ (?)

isotopy of \mathbb{R}^2 での不変性... OK

RI ... $\langle \text{B} \rangle \stackrel{?}{=} \langle \text{I} \rangle$

$$\langle \text{B} \rangle = A \langle \text{I}_0 \rangle + A^{-1} \langle \text{I} \rangle$$

$$= A(-A^2 - A^{-2}) \langle \text{I} \rangle + A^{-1} \langle \text{I} \rangle = -A^3 \langle \text{I} \rangle \quad \text{NG.}$$

RII ... $\langle \text{X} \rangle =$

RII ... $\langle \text{X}' \rangle =$

$$\langle \text{X}'' \rangle =$$

~~★~~★:

補正する! ... RIの両辺で異なる量, RII, RIVで不変な量

その1 系各み目に向きをつける。

その2 向きをつける。

Def

$$\vec{V}_L(\vartheta) := (-A^3)^{-w(\vartheta)} \langle D \rangle \Big|_{A^2 = -q^{-\frac{1}{2}}}$$

$$V_L(\vartheta) := (-A^3)^{-f(\vartheta)} \langle D \rangle \Big|_{A^2 = -q^{-\frac{1}{2}}}$$

ε { 向きを
向きを } 系各み目 { L⁺
L } の Jones の項である。

Skein 関係式



$$q^{-1} \vec{V}_{L^+}(\vartheta) - q \vec{V}_{L^-}(\vartheta) = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) V_{L_0}(\vartheta). \quad \text{★}$$

$\vec{V}_*(\vartheta)$ は $V_\varphi = 1$ と ★ で定義できる!

$$\langle \searrow \rangle = A \langle \cup \rangle + A^{-1} \langle \simeq \rangle \quad \text{--- ①}$$

$$\langle \swarrow \rangle = A \langle \simeq \rangle + A^{-1} \langle \cup \rangle \quad \text{--- ②}$$


$$\text{①} \times A - \text{②} \times A^{-1}$$

$$A \langle \searrow \rangle - A^{-1} \langle \swarrow \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \cup \rangle$$

$$-A^4 (-A^3)^{-1} \langle \searrow \rangle + A^{-4} (-A^3) \langle \swarrow \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \cup \rangle$$

Cor $P_{\bar{L}}(x, y) = P_L(x^{-1}, -y)$. $(\vec{V}_{\bar{L}}(g) = \vec{V}_L(g^{-1}))$

☺ $(L_+, L_-, L_0) \xrightarrow{\text{鏡像}} (\bar{L}_+, \bar{L}_-, \bar{L}_0)$



$$\therefore x P_{\bar{L}}(x, y) - x^{-1} P_{\bar{L}}(x, y) = y P_{\bar{L}_0}(x, y)$$

$$\Leftrightarrow x^{-1} P_{\bar{L}_+}(x, y) - x P_{\bar{L}_-}(x, y) = -y P_{\bar{L}_0}(x, y)$$

Ih (HOMFLY)

次の (i) (ii) に対し 不変量

$$P_{\mp}(x, y) : \{\text{向き付き絡み目}\} \rightarrow \mathbb{Z}[x, x^{-1}, y]$$


かつ 唯一存在する.

$$(i) P_{\emptyset}(x, y) = 1.$$

$$(ii) x P_{L_+}(x, y) - x^{-1} P_{L_-}(x, y) = y P_{L_0}(x, y)$$

$$-A \quad \begin{matrix} g^{-1} \rightarrow -g^{-1} \\ g^{\frac{1}{2}} - g^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \bar{g}^{\frac{1}{2}} - g^{\frac{1}{2}} \end{matrix}$$

$$V_{\mathcal{G}}(g) = \vec{V}_{\mathcal{G}_D}(g) = (-A^3)^3 (A^7 - A^3 - A^{-5}) (-A^2 - A^{-2}) \Big|_{A^2 = -g^{-\frac{1}{2}}}$$



$$= (-A^{16} + A^{12} + A^4) (-A^2 - A^{-2}) \Big|_{A^2 = -g^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= (-\bar{g}^4 + \bar{g}^3 + g^{-1}) (g^{\frac{1}{2}} + g^{-\frac{1}{2}}).$$

$$V_{\mathcal{L}}(g) = (-g^4 + g^3 + g) (g^{\frac{1}{2}} + g^{-\frac{1}{2}})$$

$$\Rightarrow \mathcal{G} \neq \mathcal{L} \quad \square$$

• 量子不変量

研究対象... $\{ \text{向きなし系絡み目} \} / \sim_{\mathbb{R}^3}$

研究手段... $\{ \text{輪切り図式} \} / \sim_T$

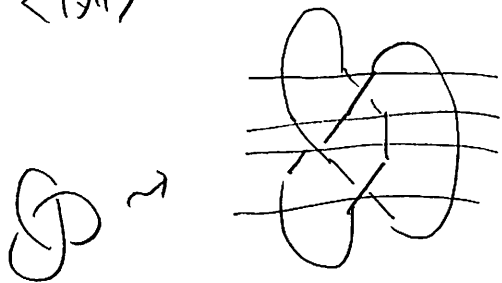
Def. 次の基本図: から

(i) 有限回の "テンソル積"

(ii) (i) で得られる 図 の有限回の "合成"

で得られる系絡み目 図式 を 輪切り図式 とする。

<例>



$$(U \otimes U) \circ (1 \otimes X \otimes 1) \circ (X \otimes 1 \otimes 1) \circ (1 \otimes X \otimes 1) \circ (\cap \otimes \cap)$$

<基本図>

$$X \quad X \quad \cap \quad \cup \quad | \quad \phi$$

<テンソル積>

$$\boxed{A} \otimes \boxed{B} = \boxed{A \mid B}$$

<合成>

$$\boxed{A} \circ \boxed{B} = \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline A \\ \hline \end{array}$$

Th. (Turaev)

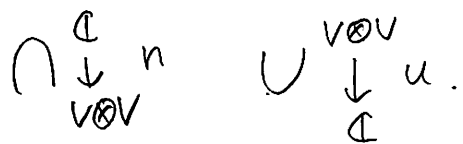
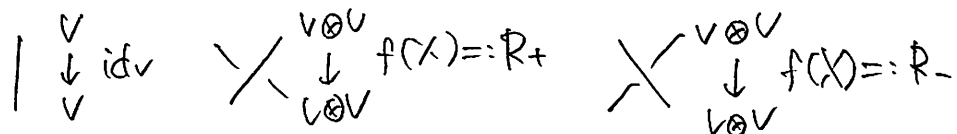
D, D' : 輪切り図式

$L_D \sim L_{D'} \Leftrightarrow D$ と D' は $T_0, T_0', T_{\pm} \sim T_{\pm}, R_{\pm} \sim R_{\pm}$ のくり返しで移り合う。

が成り立つ。

V : \mathbb{C} 上の有限次元線形空間

f_V : {基本図式} \rightarrow $\{V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes n} \mid m, n \geq 0\}$



\bar{f}_V : {輪廊式図式} $\rightarrow \mathbb{C}$

\bar{f}_V から定まる写像とする。

Q. \bar{f}_V の "系各々" の不変量 1 になるための R_+, R_-, n, u の満たすべき条件は?

RIII ... ヤンバウスター方程式 ... 統計物理
解 .. R行列 2次元可解模型

R行列を探せ!!

↓

Duinfeld, Jimbo, 1987.

量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ とその有限次元表現 V を与える \Rightarrow R 行列が具わると \rightarrow 量子 (q, V) 不変量.

R 行列が具わると \rightarrow 量子 (q, V) 不変量.

Jones の項式 .. 量子 (sl_2, V_1) 不変量.
↑
2次元表現

完全不変量か?
↓
Jones の項式

↓
普遍的な不変量

↓ V

量子 (q, V) 不変量

↓ $q=sl_2, V=V_1$

Kauffman の項式 \approx

Jones の項式 \leftarrow HOMFLY の項式