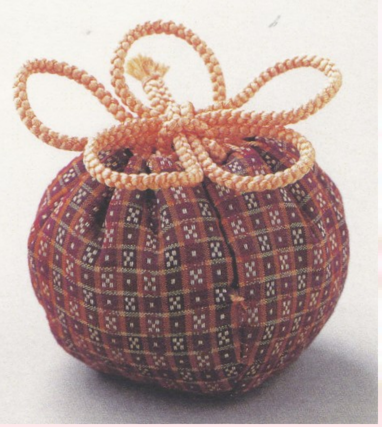
結び目の数学

京都大学数理解析研究所
鈴木咲衣

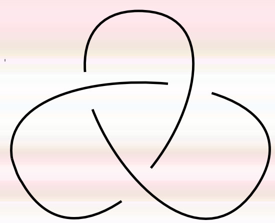
   

2012年8月1日＠愛知県立明和高校

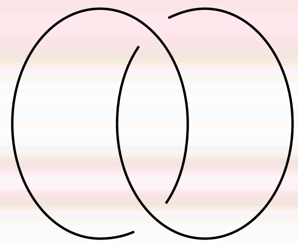
目次

1．結び目って？

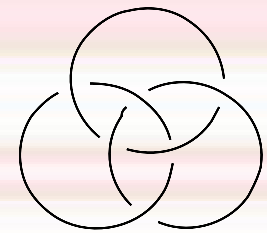
結び目：３次元空間の中にうめ込まれた円周



三葉結び目



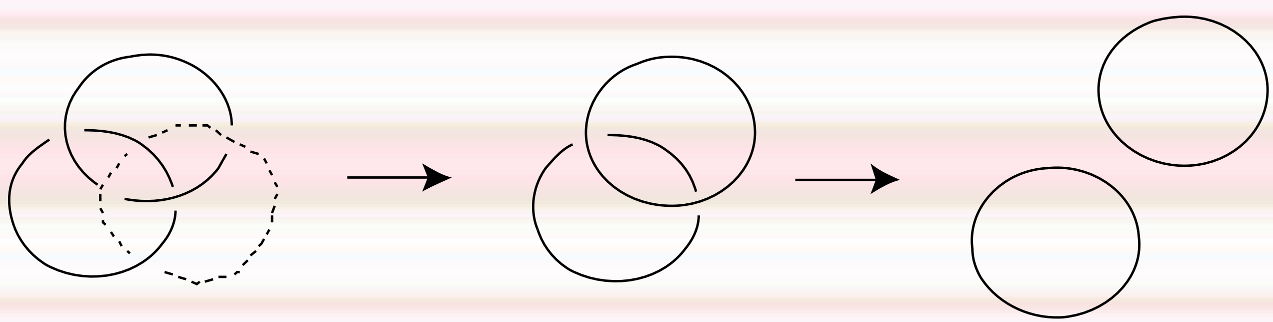
ホップ絡み目



ボロミアン絡み目

ボロミアン絡み目…どの２つの円周も絡んでいない！

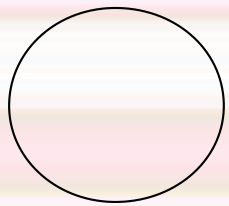
(3つの円周が集まって初めて絡む.)



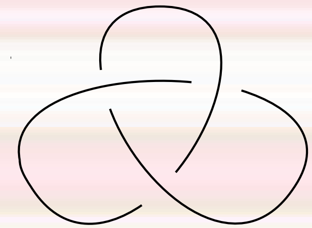
よりみち

1．結び目って？

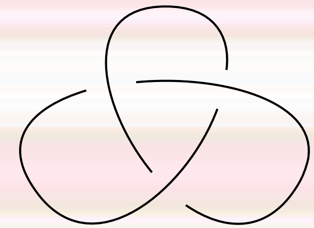
＜結び目の例＞



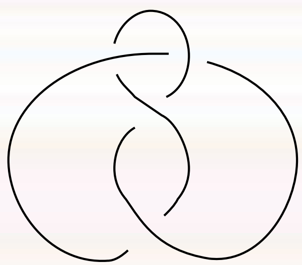
自明な結び目K0



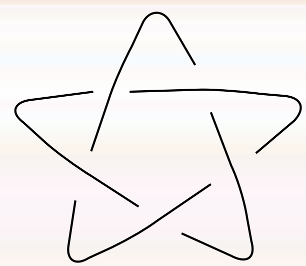
三葉結び目K31



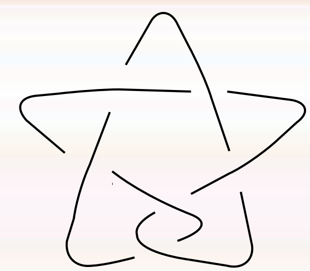
$\overline{\mathrm{K31}}$



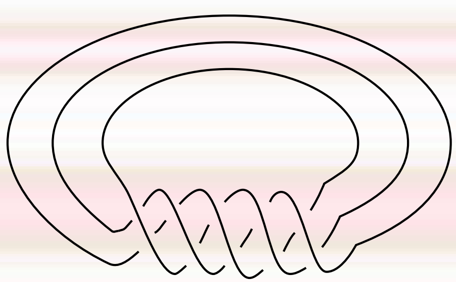
８の字結び目K41



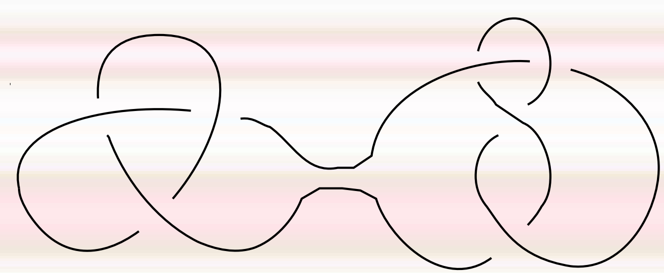
K51



K61



(3,5)トーラス結び目

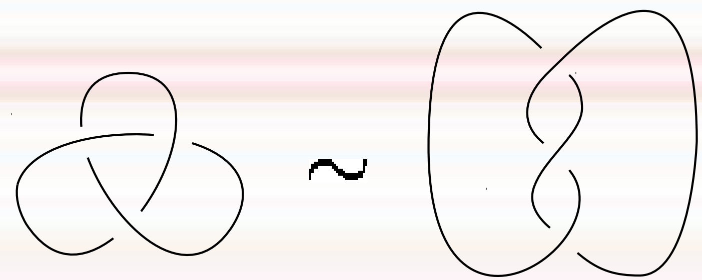


K31×K41

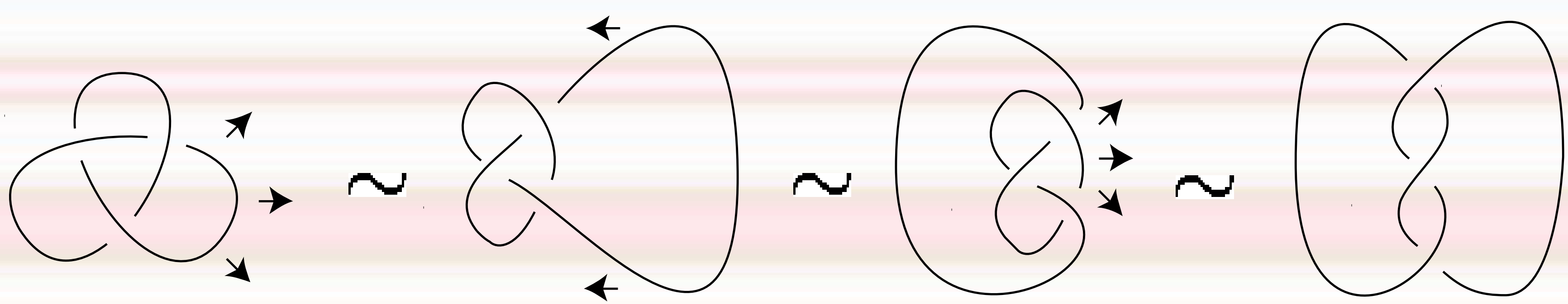
1．結び目って？

結び目KとK'が連続的に移りあうとき, K～K'と表す.

＜例＞

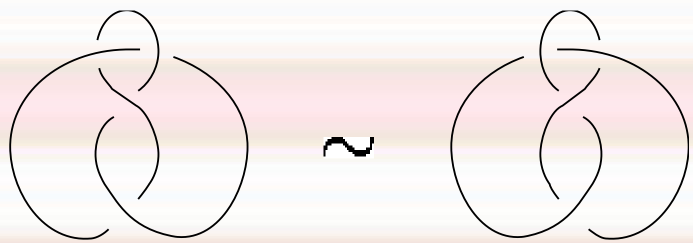


みえますか？



1．結び目って？

- 1849年…J.B.Listingのメモ (「渦巻き原子説」？)

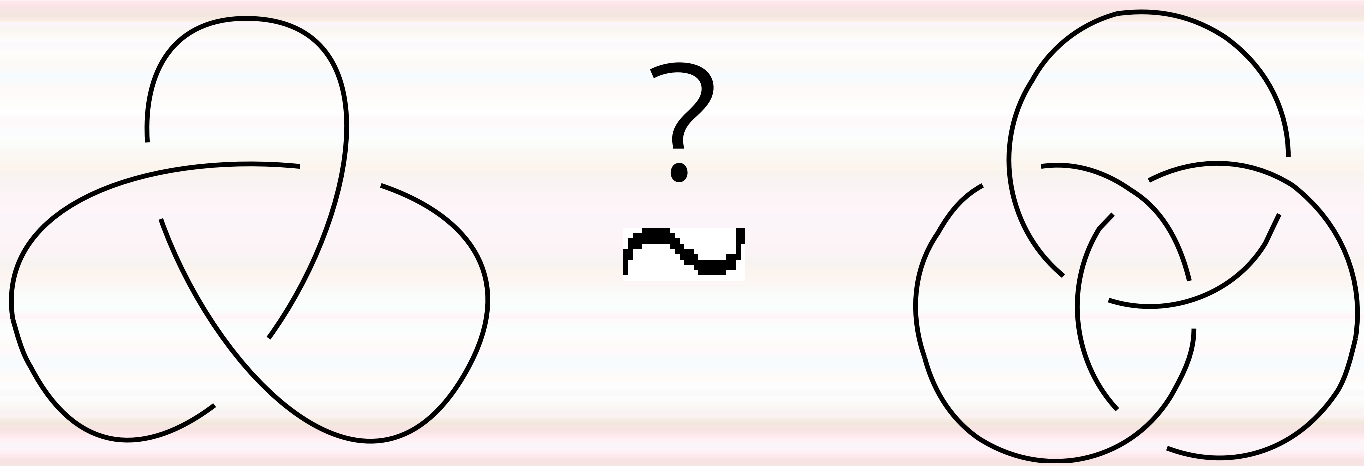


- 1930年代…K. Reidemeister, H. Seifert, J. W. Alexander
- 1940年代後半～1970年代…R. H. Fox, 本間龍雄, 樹下眞一, 杉本邦男, 河内明夫, (基礎理論の確立)
- 1980年代…V. F. R. Jones, 村上順, 大槻知忠, 葉廣和夫, (量子力学, 統計学, 物理学など様々な分野との結びつきながら大きく発展中！！)

２．結び目の不変量を計算してみよう

２．結び目の不変量を計算してみよう

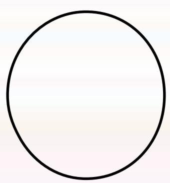
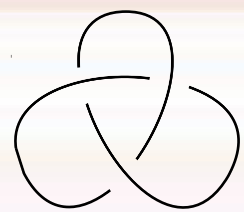
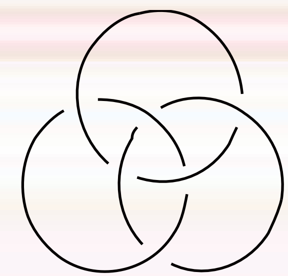
次の２つの絡み目は同じ？

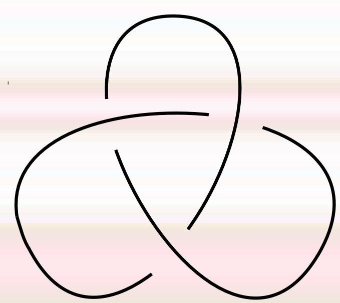
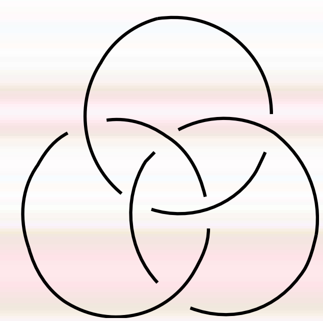


2．結び目の不変量を計算してみよう

成分の数…連続的変形で変わらない，不変な量！

- 成分数 s: {絡み目} → {1, 2, 3, 4, , , }

s()=1,　s()=1,　s()=3

 $\not\sim$ 

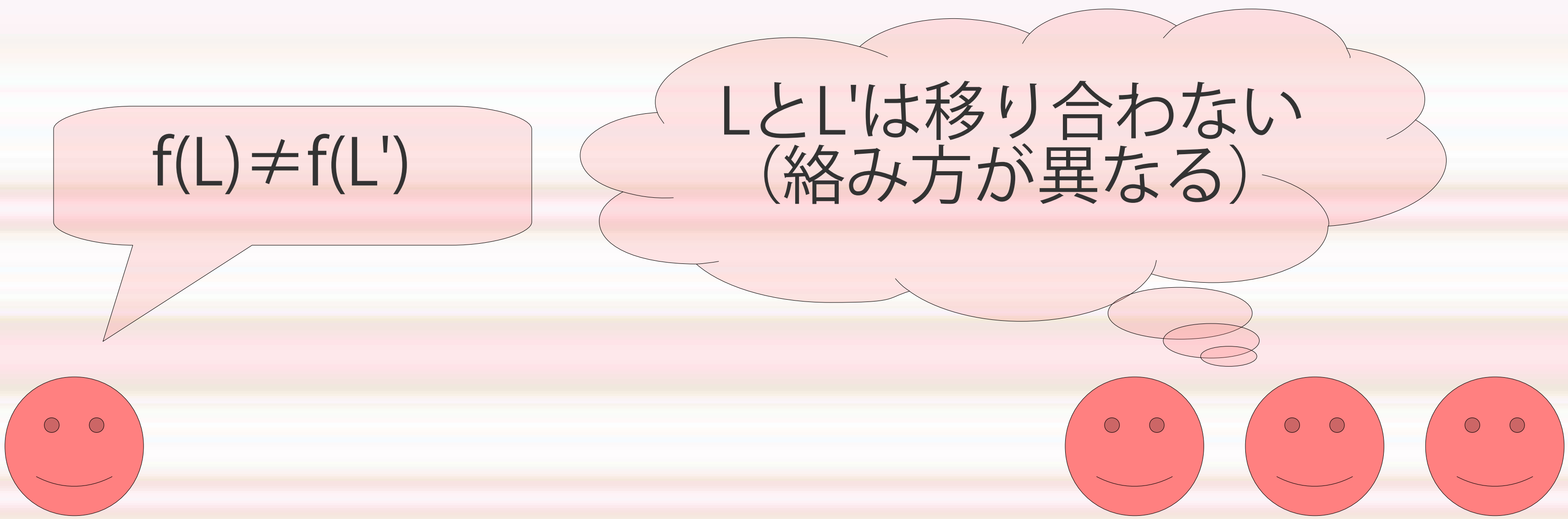
2．結び目の不変量を計算してみよう

不変量：写像 f: {絡み目} → G（集合, 整数や多項式など）

(すなわち, 絡み目Lに対して値f(L)を決めるもの)

であって, L～L'ならば f(L)=f(L') となるもの.

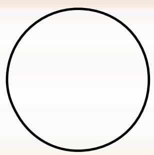
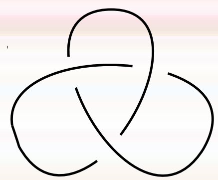
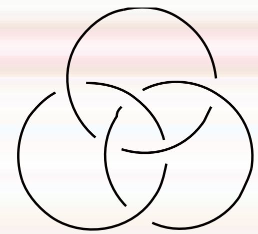
「絡まる」現象を記述するための言語



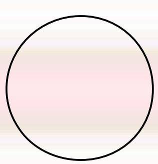
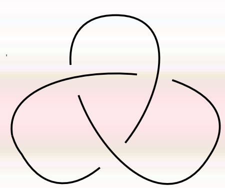
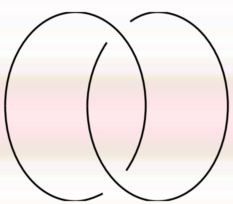
2．結び目の不変量を計算してみよう

〈不変量の例〉

- 成分数 s: {絡み目} → {1, 2, 3, 4, , , }

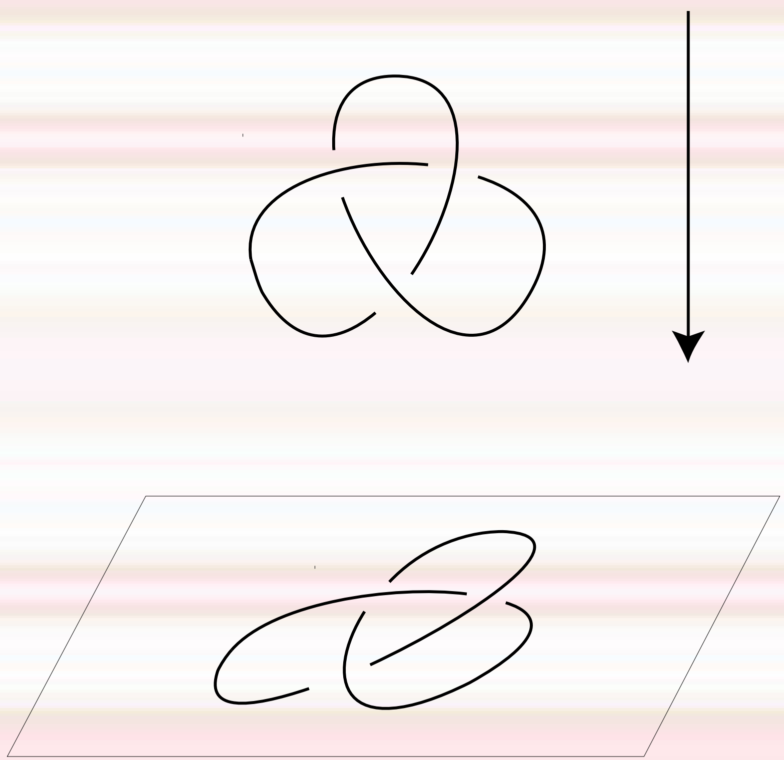
s()=1, s()=1, s()=3

- 最小交点数 m: {絡み目} → {0, 1, 2, 3, 4, , , }

m()=0, m()=3, m()=2

2．結び目の不変量を計算してみよう

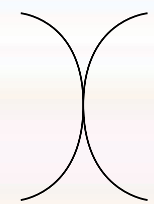
絡み目の図式…絡み目の射影図＋交差の情報



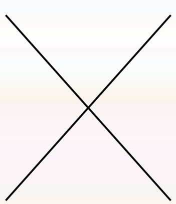
ただし…

1．交差は横断的

×…

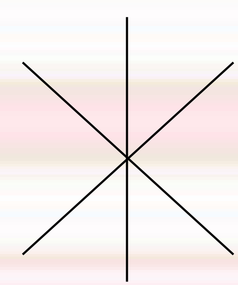


○…



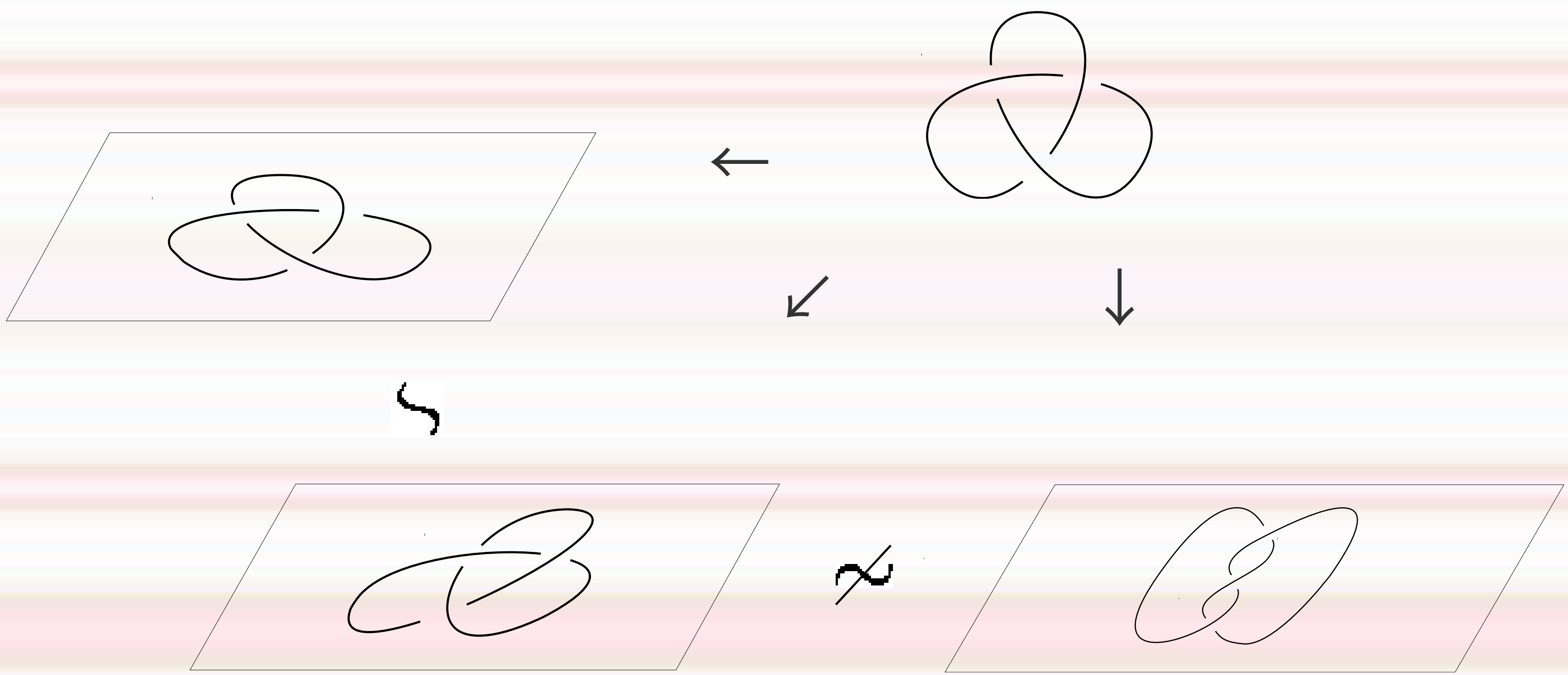
2．３重点以上はなし

×…

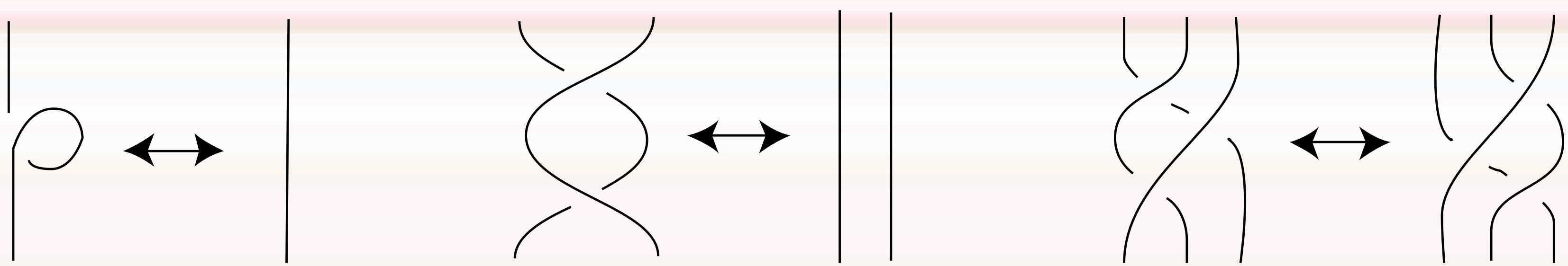


2．結び目の不変量を計算してみよう

図式DとD'が連続的に移りあうとき, D～D'と表す.



ライデマイスター(*Reidemeister*)変形

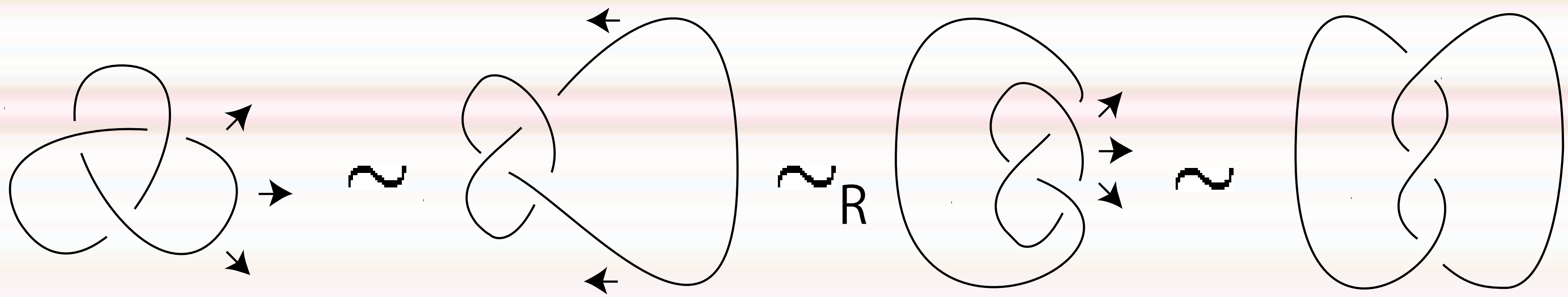


RI **RII** **RIII**

図式DとD'がRI, RII, RIIIの繰り返しと連続変形で移り合うとき，$D \sim_R D'$と表す.

2．結び目の不変量を計算してみよう

例えば…



1対1

$\{$絡み目$\}\ /\!\sim \quad \longleftrightarrow \quad \{$絡み目図式$\}\ /\!\sim_R$

2．結び目の不変量を計算してみよう

図式を用いて不変量を作る

不変量 f：{絡み目}/$\sim$ → {0, 1, 2, 3, , , }

1 対 1

ここを作れば良い！

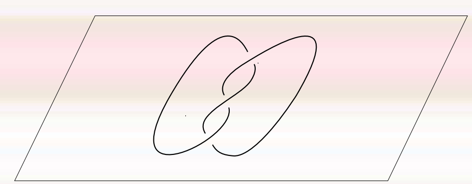
{絡み目図式}/ $\sim_R$

図式を用いて結び目の不変量を作る（レシピ）

1．絡み目図式に対して値を対応させる.

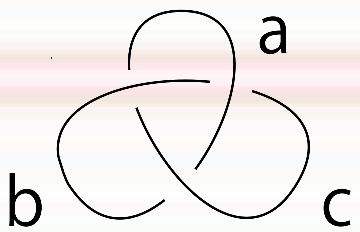
f() = a

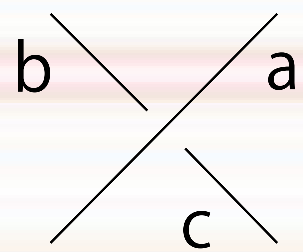
2．同じ絡み目を表す図式D,D'に対して同じ値になる
ことを確認する.　（RI,RII,RIIIでの不変性）

f() = a　　f() = a

p彩色数

結び目図式Dの各弧に対して, 0以上p－1以下の整数を配置し, 各交点のまわりで





$$2a=b+c+pn$$
$$(2a \equiv b+c, \mod p)$$

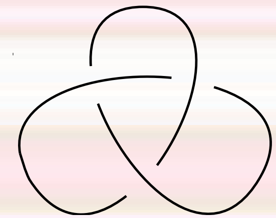
（nは整数）となるとき, その配置をDのp彩色と呼ぶ.

p彩色の個数はpの倍数になり（なぜ？）, pで割った数

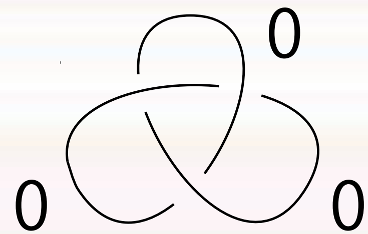
$$Cp(D)=（図式Dのp彩色の個数）/p$$

を図式Dの<u>p彩色数</u>と呼ぶ.

2．結び目の不変量を計算してみよう

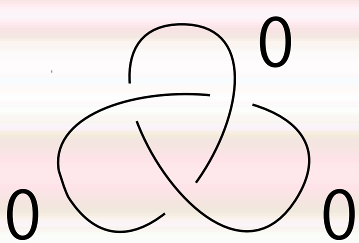
$D =$ 

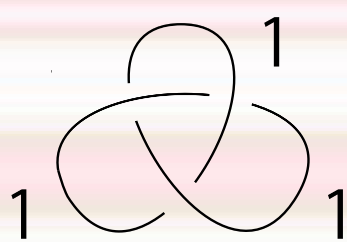
p＝１のとき,



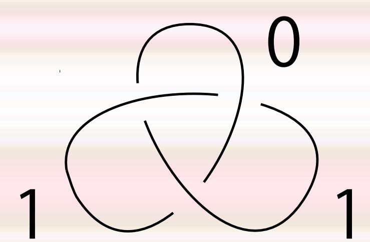
$C1(D) = 1$

p＝２のとき,





×…

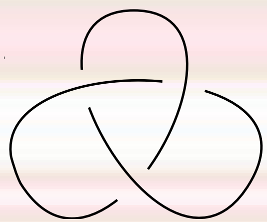


$C2(D) = 2/2 = 1$

2．結び目の不変量を計算してみよう

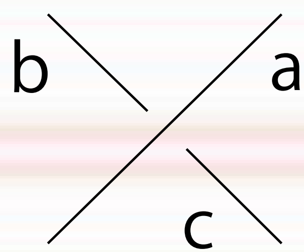
ｐ＝３のときを計算してみよう.

やること：



の各弧に０，１，２を配置するすべての方法を列挙する.

ただし各交点で



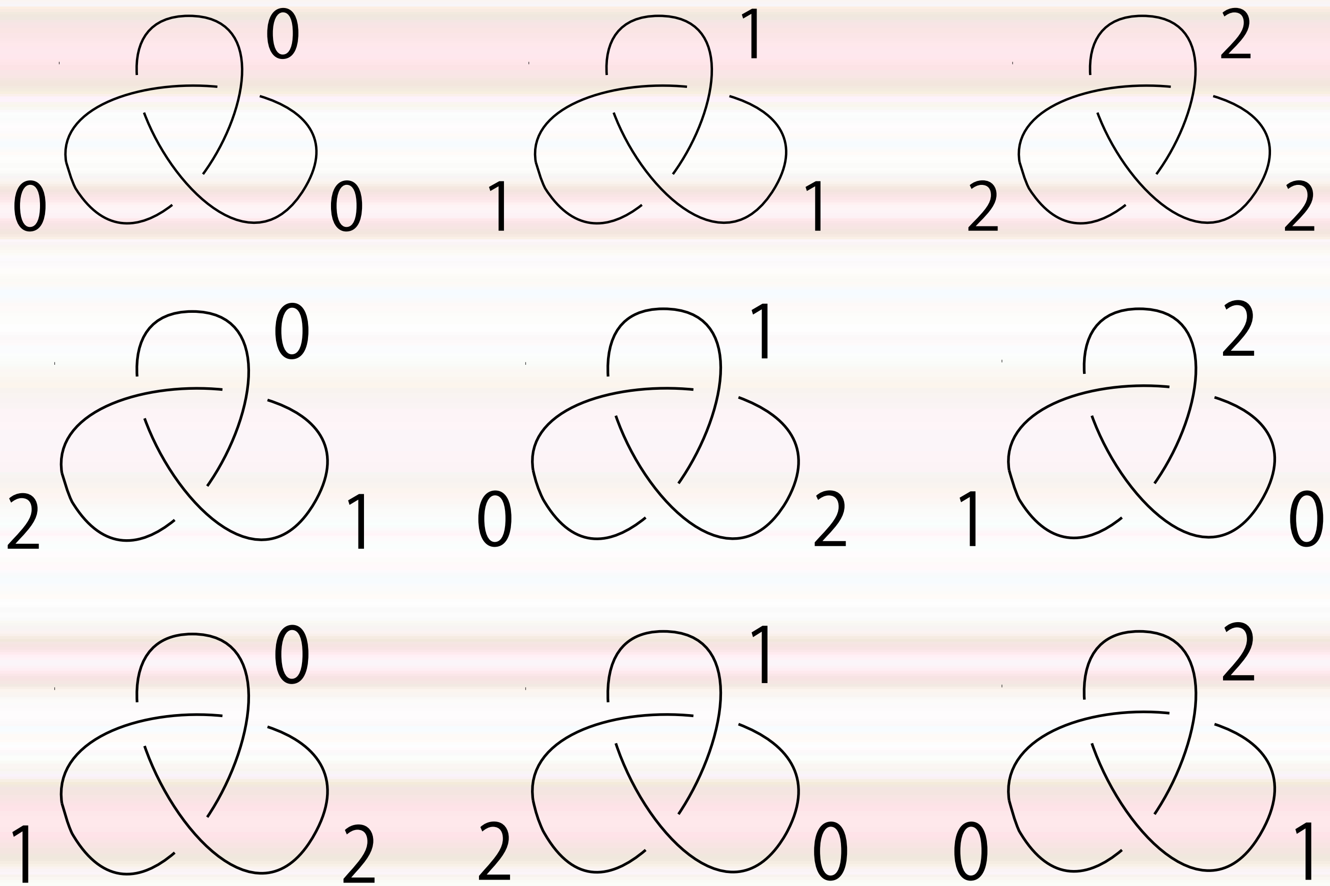
$$2a=b+c+3n$$

（ｎは整数）であることが条件.

（⇔ 2aとb+cを3で割った余りが同じ．）

2．結び目の不変量を計算してみよう

p＝３のときを計算してみよう.

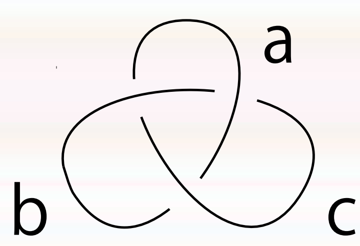


$C3(D) = 9/3=3$

2．結び目の不変量を計算してみよう

じつは…p が 3 の倍数でないとき Cp(D) = 1 となり,
p が 3 の倍数のとき Cp(D) = 3 となる.

なぜ？



$2a=b+c+lp,$

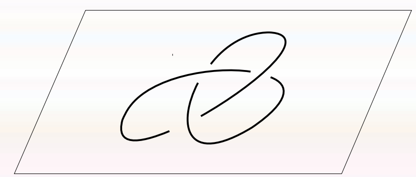
$2b=c+a+mp,$

$2c=a+b+np,$

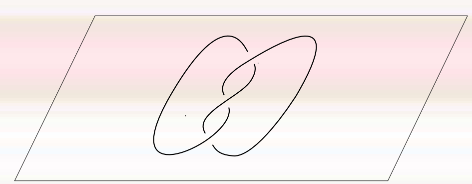
をがんばって解く.

図式を用いて結び目の不変量を作る（レシピ）

1．絡み目図式に対して値を対応させる.

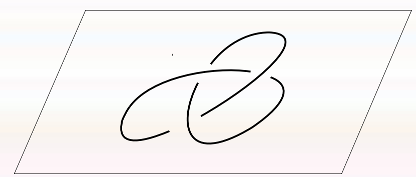
 → Cp()

2．同じ絡み目を表す図式D,D'に対して同じ値になることを確認する (RI,RII,RIIIでの不変性).

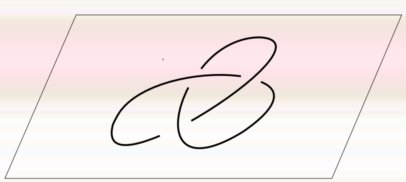
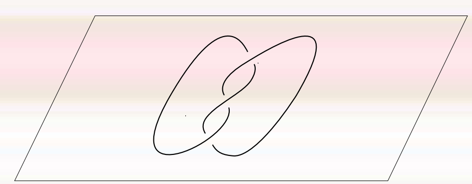
Cp() $\overset{?}{=}$ Cp()

図式を用いて結び目の不変量を作る（レシピ）

1．絡み目図式に対して値を対応させる.

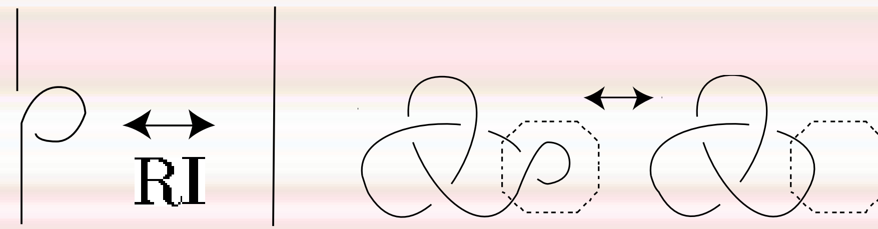
 → Cp()

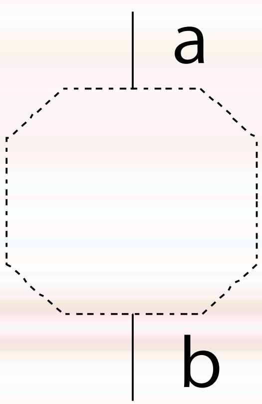
2．同じ絡み目を表す図式D,D'に対して同じ値になることを確認する (RI,RII,RIIIでの不変性).

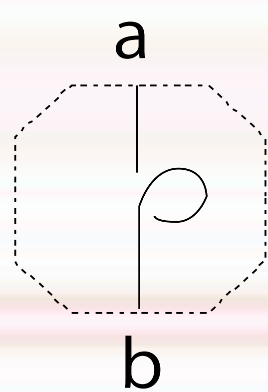
Cp() $\overset{?}{=}$ Cp()

ｐ彩色数は結び目の不変量か？

RIの不変性のチェック…

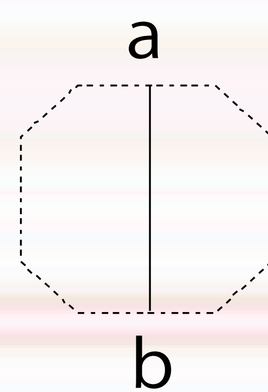


$D_0=$ 

$D_1=$ 

$2b \equiv a+b$

$\rightarrow b \equiv a \rightarrow b=a$

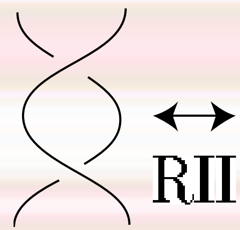
$D_2=$ 

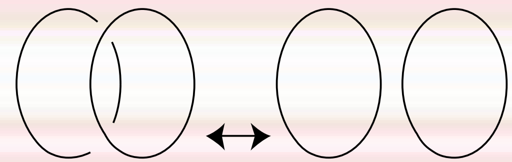
$b=a$

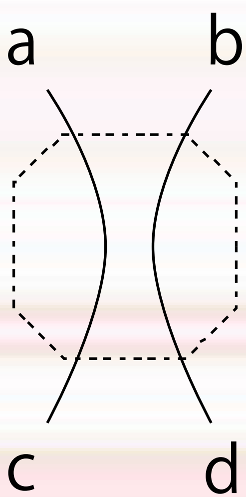
$Cp(D_1)=Cp(D_2)=$（$a=b$となるD_0のｐ彩色の数）/p

ｐ彩色数は結び目の不変量か？

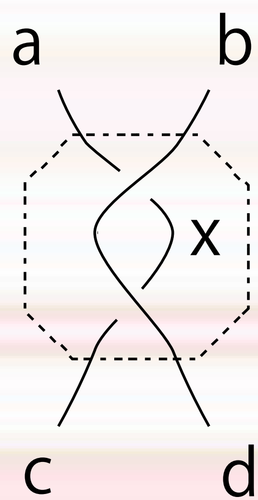
RIIの不変性のチェック…







c=a
d=b

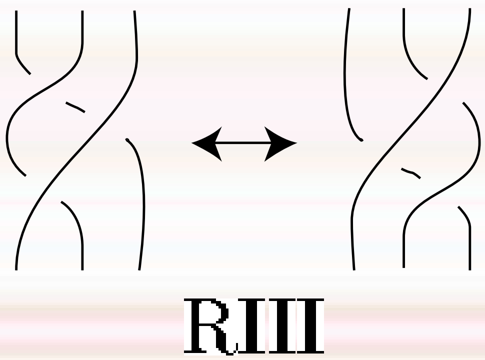


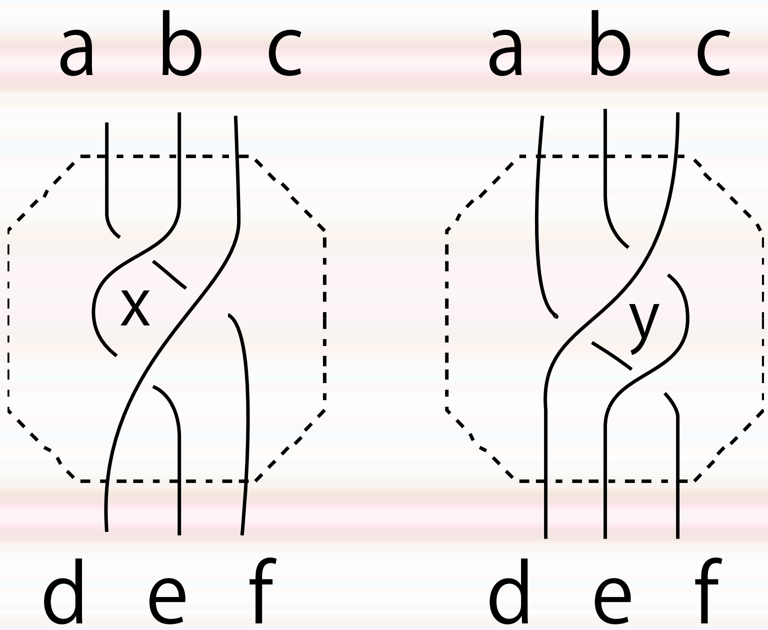
$$\left.\begin{array}{l} 2b \equiv a+x \\ 2d \equiv x+c \end{array}\right\} \quad c \equiv 2d-x \equiv 2d-2b+a \equiv a$$

d=b

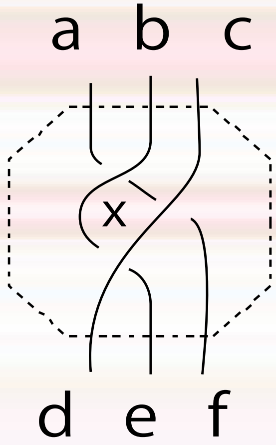
$\rightarrow$ c=a

*RIII*で不変であることをチェックしよう.





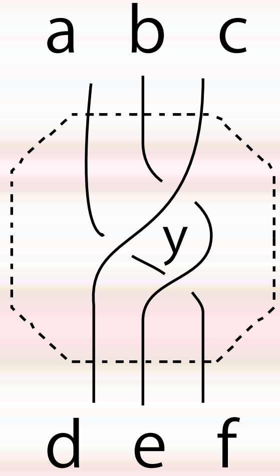
RIIIで不変であることをチェックしよう.



$d=c,$
$2b \equiv a+x,$
$2c \equiv x+f,$
$2c \equiv b+e,$

⇨

$d=c,$
$e \equiv 2c-b,$
$x \equiv 2b-a,$
$f \equiv 2c-2b+a,$



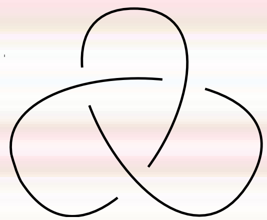
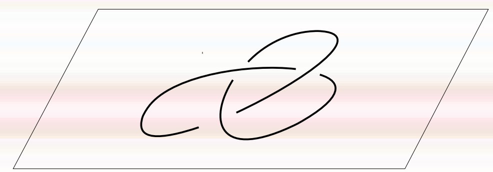
$d=c,$
$2c \equiv b+e,$
$2c \equiv a+y,$
$2e \equiv y+f,$

⇨

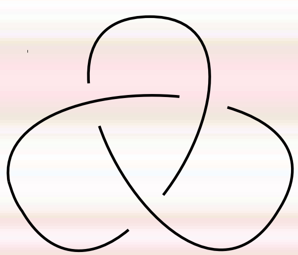
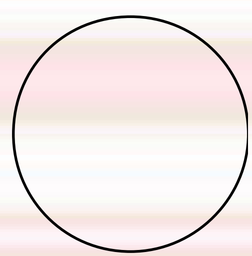
$d=c,$
$e \equiv 2c-b,$
$y \equiv 2c-a,$
$f \equiv 2e-2c+a$
$\equiv 2c-2b+a$

OK!!

不変量の完成！

Cp() := Cp()

どの図式を持ってきても大丈夫！

 $\not\sim$  を示すことができた！

３．私の研究のお話

- ～1980年代（基礎の確立）
  1．同型問題（２つの絡み目があるとき, それらが同型な絡み目であるかどうかを判定せよ）
  2．分類問題（すべての絡み目の表を作成せよ）
- 1980年代～（量子不変量の登場）
  1．絡み目の集まり全体の構造を知りたい
  2．低次元トポロジーへの応用

（分類問題はほぼ終わったという人も…）

研究の背景

量子不変量

幾何学の大転機！

1984年･･･ ジョーンズ多項式の発見

↓ 大量の不変量

「量子不変量」として統一される（量子群＋表現）

- 統計物理, 表現論, 量子力学などの代数的な言葉を用いて記述される.

研究の動機

言語が異なる！

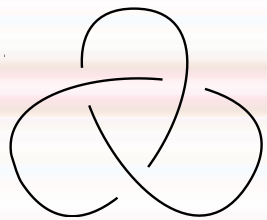
古典的な不変量	量子不変量
◆ 素朴なもの ◆ 古典的な幾何の言葉を用いて記述されるもの	◆ 統計物理, 表現論, 量子力学など, 代数の言葉を用いて記述される

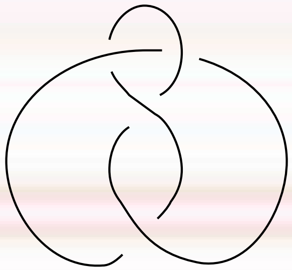
知りたいこと

絡み目の幾何的性質と量子不変量の代数的性質の関係

異なる言語間の翻訳がしたい！！

例えば

J() $= t+t^3-t^4$

J() $= t^2-t+1-t^{-1}+t^{-2}$

メリット

- 量子不変量が絡み目のどんな幾何的性質を測っている不変量なのかわかる.
- 量子不変量をこれまでの研究に応用できる.

4．まとめ

４．まとめ

1．身の回りの不思議を発掘すべし（結び目）
2．調べる道具を作るべし（不変量）
3．いろいろやってみるべし
4．人とのつながりを大切にすべし
5．くじけるべからず
6．うきうきするべし
7．よく寝るべし
…

どうもありがとうございました