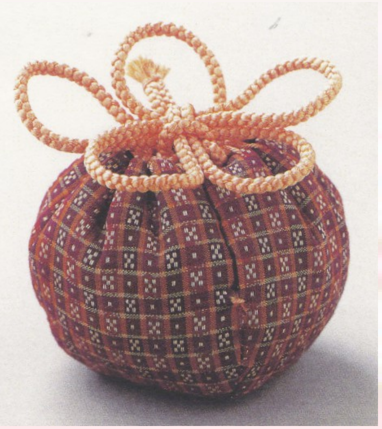
結び目の数学

京都大学数理解析研究所

鈴木咲衣





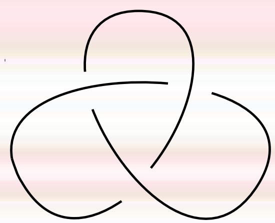

2016年3月4日＠兵庫県立龍野高校

目次

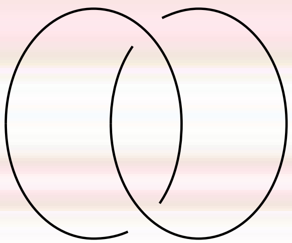
1．結び目って？

1．結び目って？

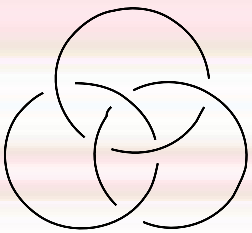
結び目：３次元空間の中にうめ込まれた円周



三葉結び目



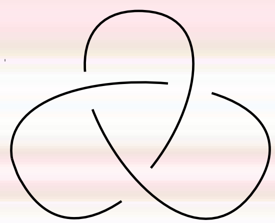
ホップ絡み目



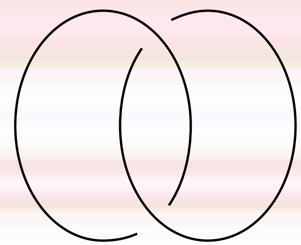
ボロミアン絡み目

1．結び目って？

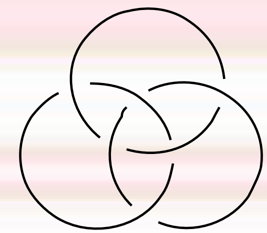
結び目：３次元空間の中にうめ込まれた円周



三葉結び目



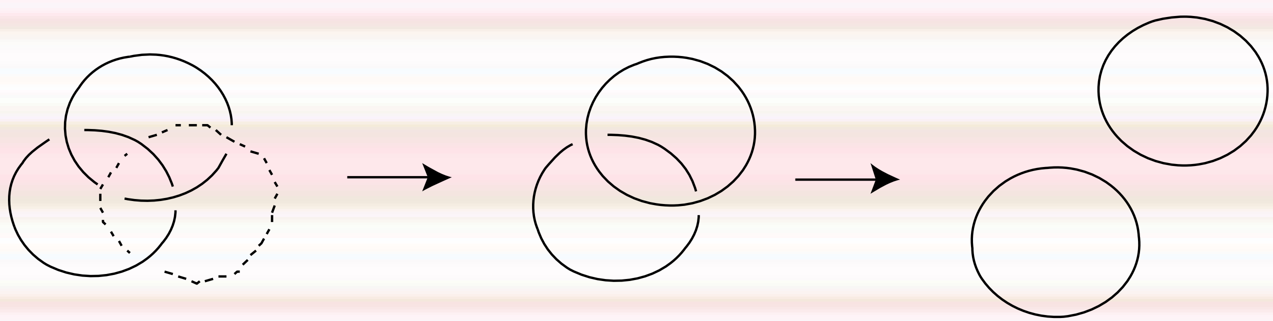
ホップ絡み目



ボロミアン絡み目

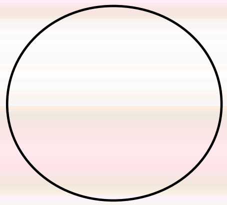
ボロミアン絡み目…どの２つの円周も絡んでいない！

(3つの円周が集まって初めて絡む.)

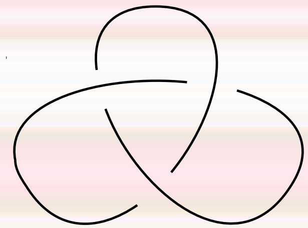


よりみち

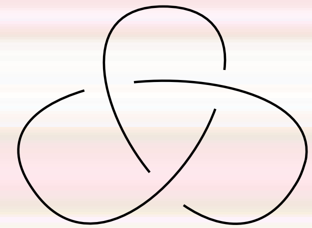
＜結び目の例＞



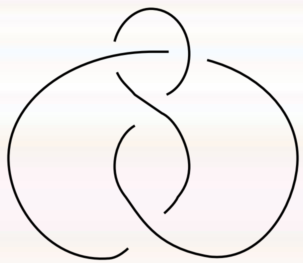
自明な結び目K0



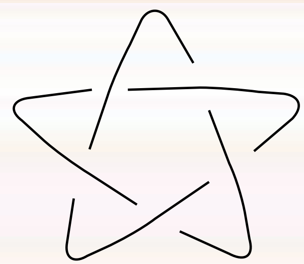
三葉結び目K31



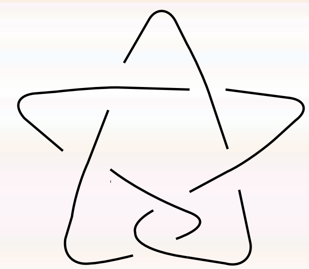
$\overline{\mathrm{K31}}$



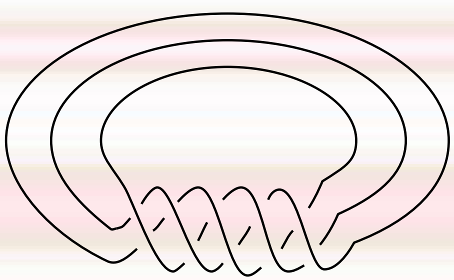
８の字結び目K41



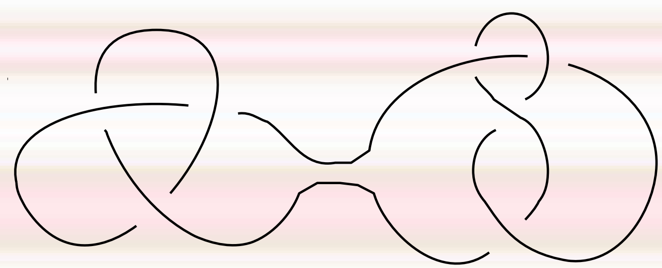
K51



K61



(3,5)トーラス結び目

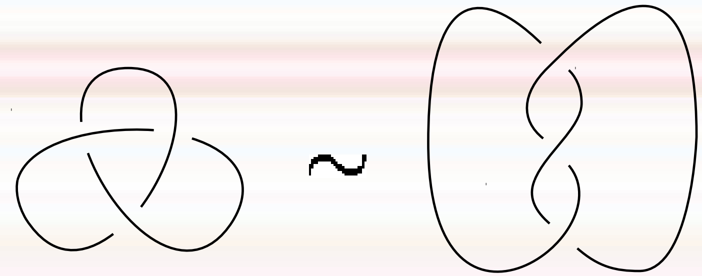


K31×K41

1．結び目って？

結び目KとK'が連続的に移りあうとき, K～K'と表す.

<例>

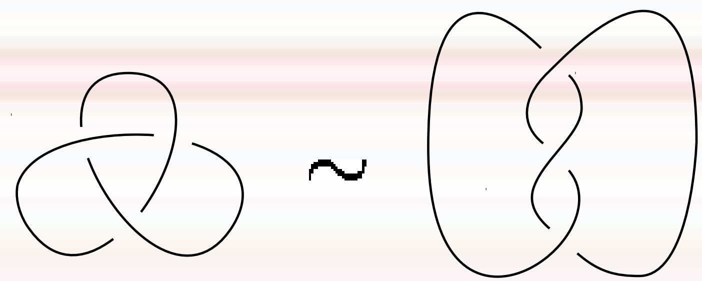


みえますか？

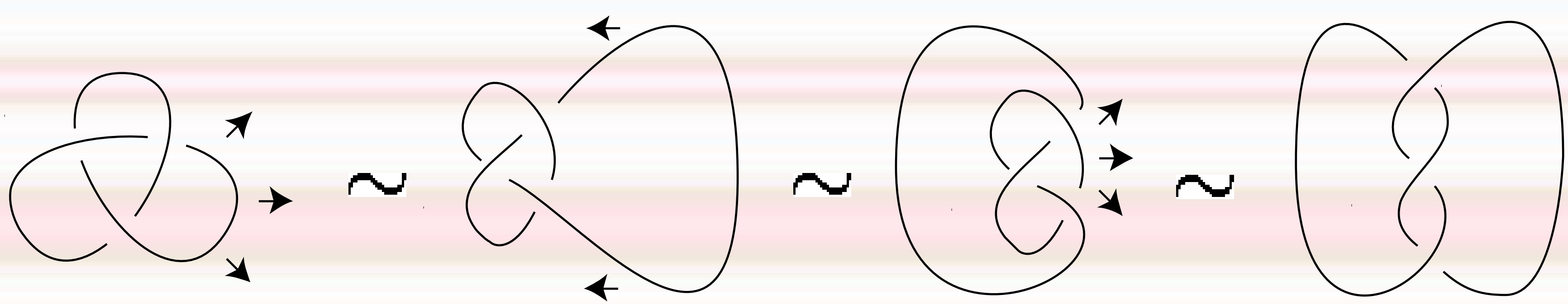
1．結び目って？

結び目KとK'が連続的に移りあうとき, K～K'と表す.

＜例＞

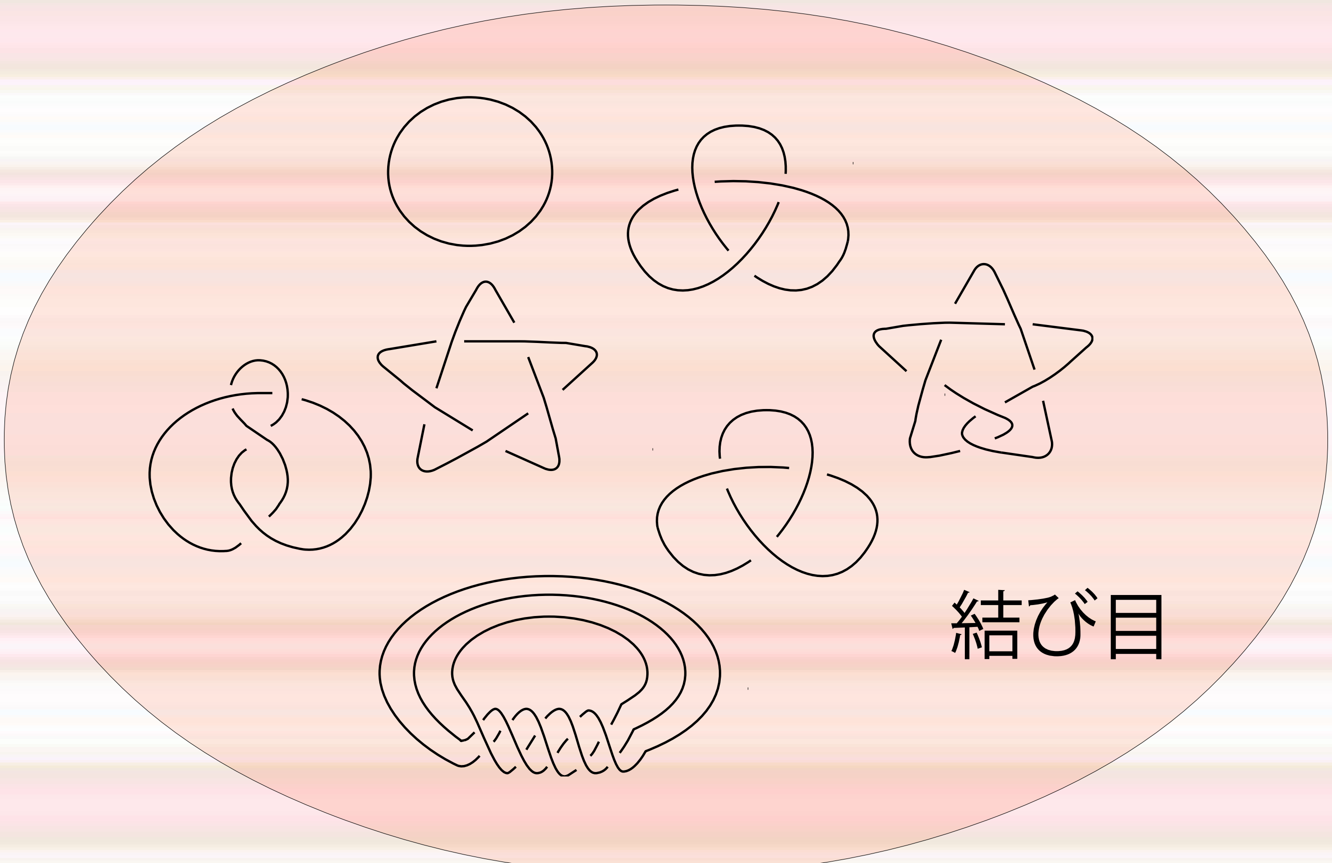


みえますか？



2．結び目で数学してみる

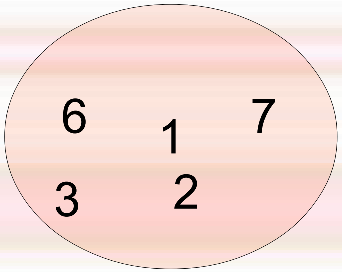
Ｑ：結び目の集まりはどんなもの？



関係性を理解したい。

2．結び目で数学してみる

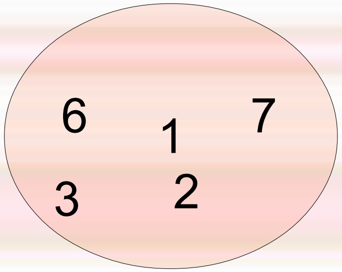
(例)　自然数 N= { 1, 2, 3 , , , }



2．結び目で数学してみる

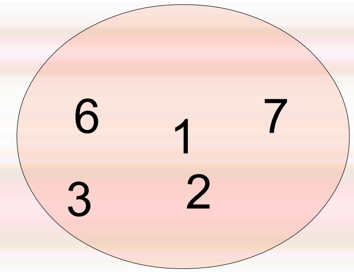
(例)　自然数 N＝{ 1, 2, 3 , , , }

かけ算：2×3＝6, 4×7=28, , , ,



2．結び目で数学してみる

(例)　自然数 N= { 1, 2, 3 , , , }



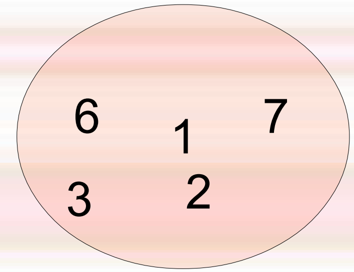
かけ算：2×3＝6, 4×7=28, , , ,

2つの自然数 a, bに対して, もうひとつの自然数
a×bを対応させる操作

(2, 3)→ 6=2×3,　 (4,7)→28=4×7,

2．結び目で数学してみる

(例)　自然数 N＝{ 1, 2, 3 , , , }



かけ算：2×3＝6, 4×7=28, , , ,

2つの自然数 a, bに対して, もうひとつの自然数 a×bを対応させる操作

(2, 3)→ 6=2×3,　(4,7)→28=4×7,

であって、次を満たすもの。

1．結合律：(a×b)×c=a×(b×c)

2．単位律：1×n=n=n×1

結び目で「かけ算」してみる！

結び目で「かけ算」してみる！

自然数の場合…2つの自然数 a, bに対して, もうひとつの自然数a×bを対応させる操作

結び目で「かけ算」してみる！

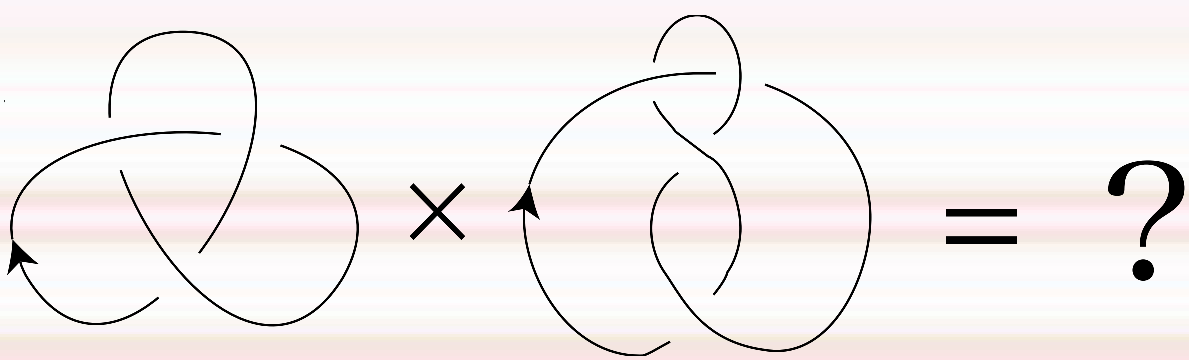
自然数の場合…2つの自然数 a, bに対して, もうひとつの自然数a×bを対応させる操作

＋ 結合律、単位律

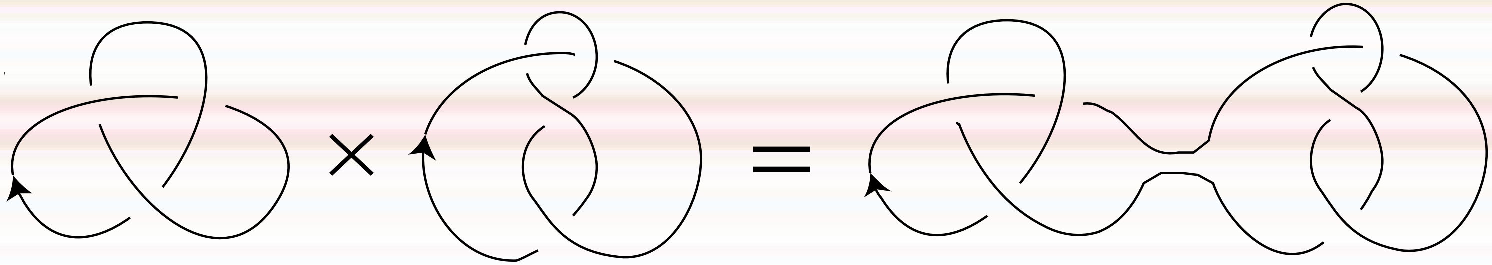
結び目で「かけ算」してみる！

自然数の場合…2つの自然数 a, bに対して, もうひとつの自然数a×bを対応させる操作

＋ 結合律、単位律

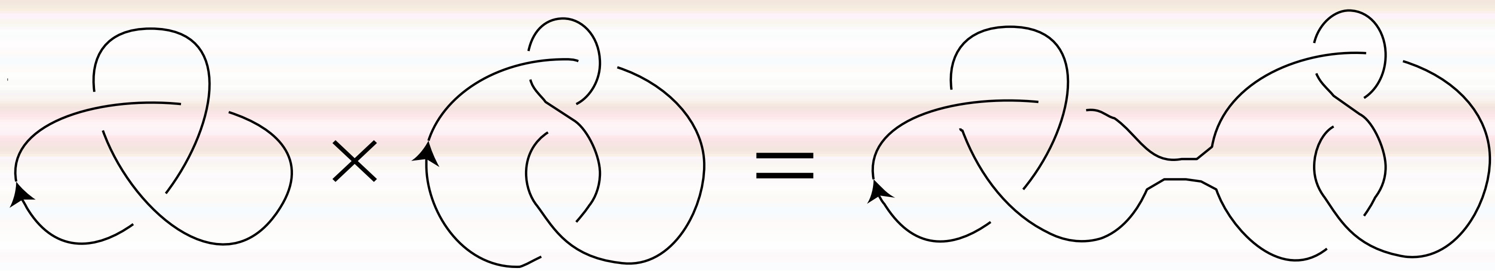


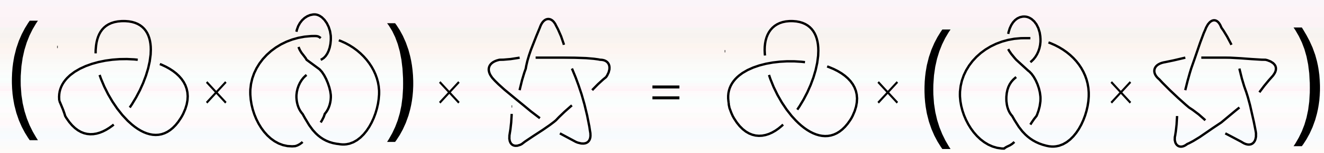
＜ひとつの例＞

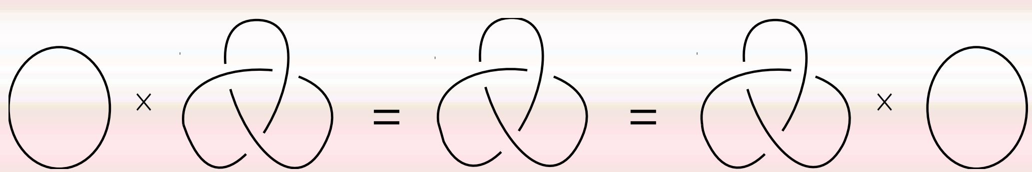


2．結び目で数学してみる

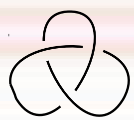
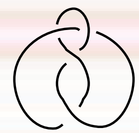
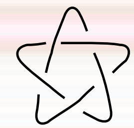
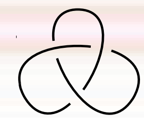
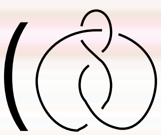
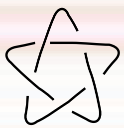
＜ひとつの例＞

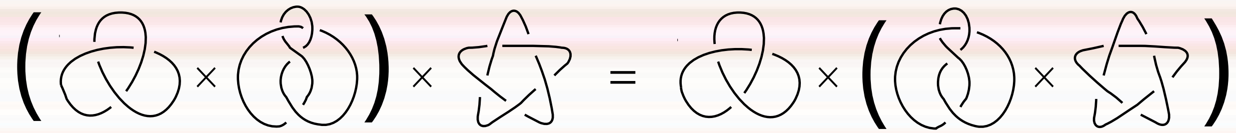


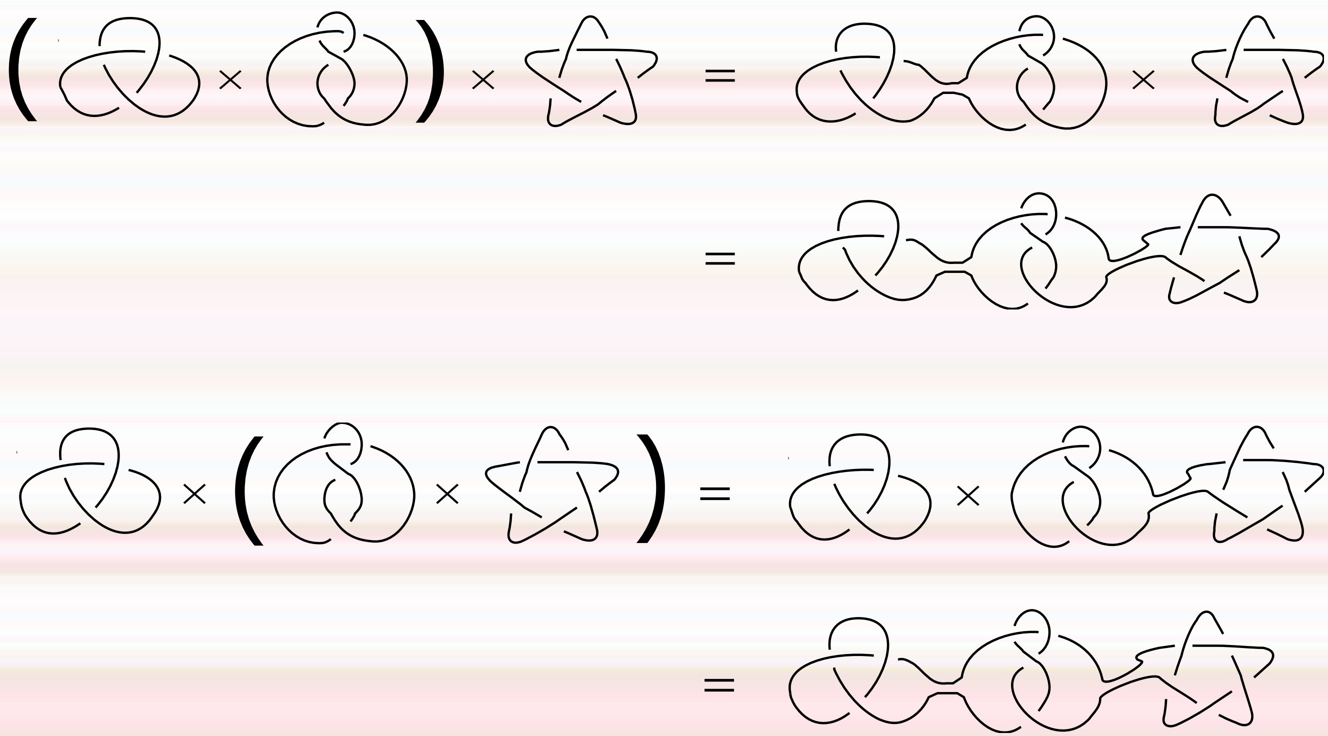
結合律  ?

単位律  ?

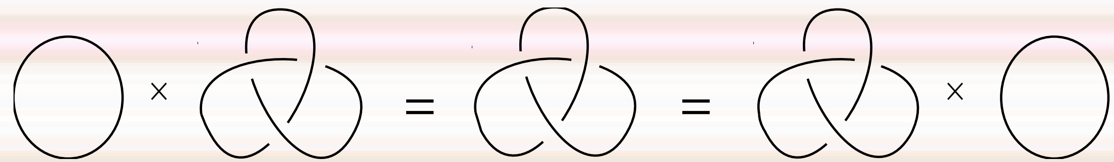
2．結び目で数学してみる

結合律：( × ) ×  =  × ( × ) ？

結合律： ？

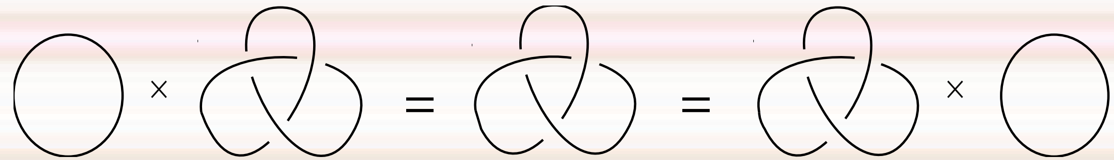


単位律：

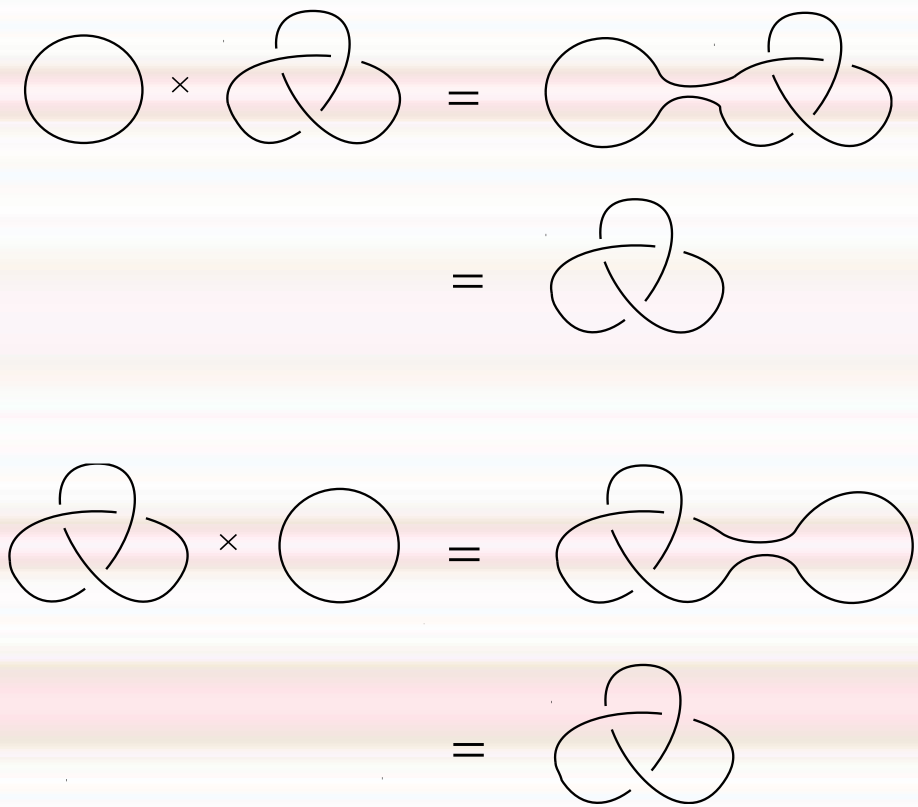


？

単位律：



？



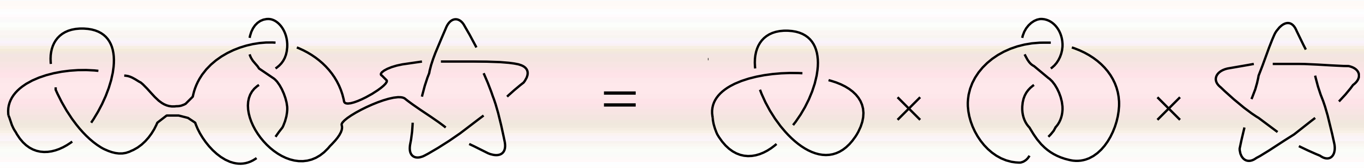
結び目の集まりにかけ算が定義できた！

結び目の集まりにかけ算が定義できた！

素因数分解の定理

素数：1 とそれ自身以外に約数を持たない自然数
素因数分解：6=2×3, 8=2×2×2　（一意的）

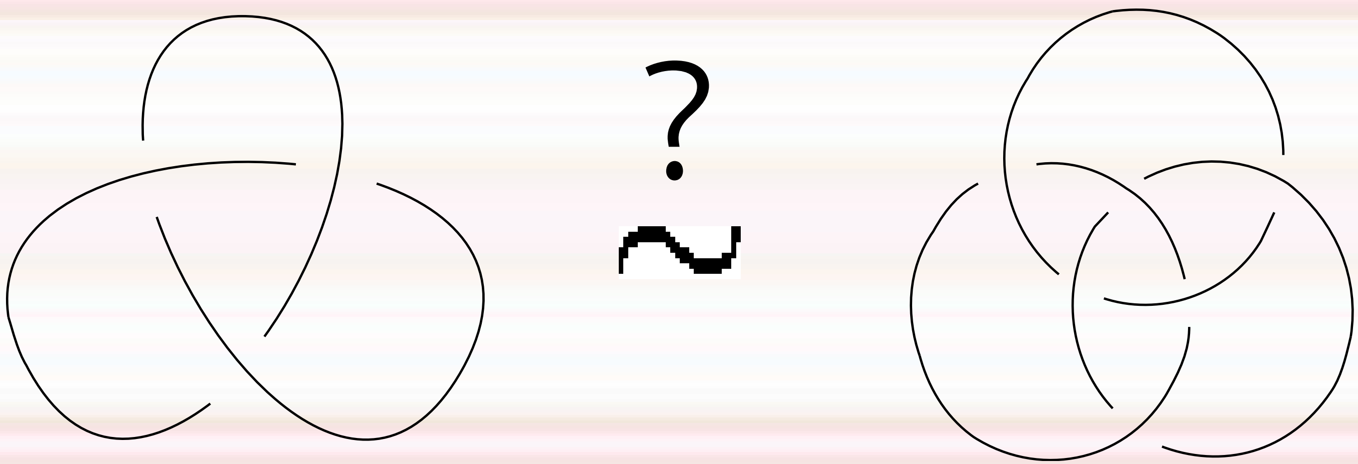
素な結び目：○とそれ自身以外に分解できない結び目
素な結び目への分解：一意的



３．結び目の不変量を計算してみよう

３．結び目の不変量を計算してみよう

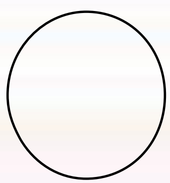
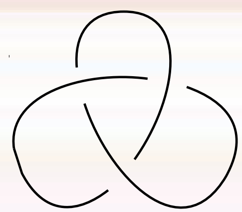
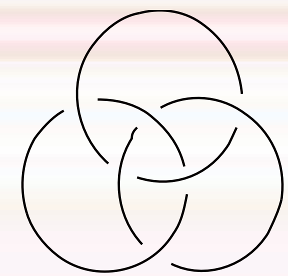
次の２つの絡み目は同じ？



3．結び目の不変量を計算してみよう

成分の数…連続的変形で変わらない，不変な量！

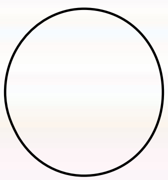
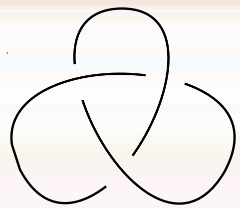
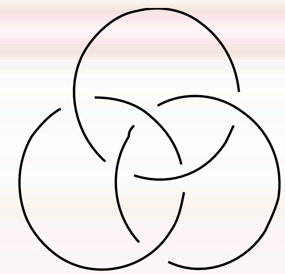
- 成分数 s: {絡み目} → {1, 2, 3, 4, , , }

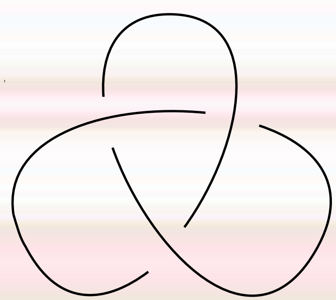
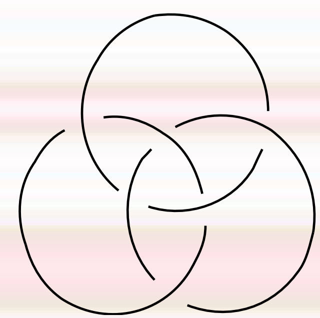
s()=1, s()=1, s()=3

3．結び目の不変量を計算してみよう

成分の数…連続的変形で変わらない，不変な量！

- 成分数 s: {絡み目} → {1, 2, 3, 4, , , }

s()=1, s()=1, s()=3

 $\not\sim$ 

３．結び目の不変量を計算してみよう

不変量：写像 f: {絡み目} → G（整数や多項式などの集まり）
(すなわち, 絡み目Lに対して値f(L)を決めるもの)
であって, L～L'ならば f(L)=f(L') となるもの.

３．結び目の不変量を計算してみよう

不変量：写像 f: {絡み目} → G（整数や多項式などの集まり）

(すなわち, 絡み目Lに対して値f(L)を決めるもの)

であって, L～L'ならば f(L)=f(L') となるもの.

⇧

「絡まる」現象を記述するための言語

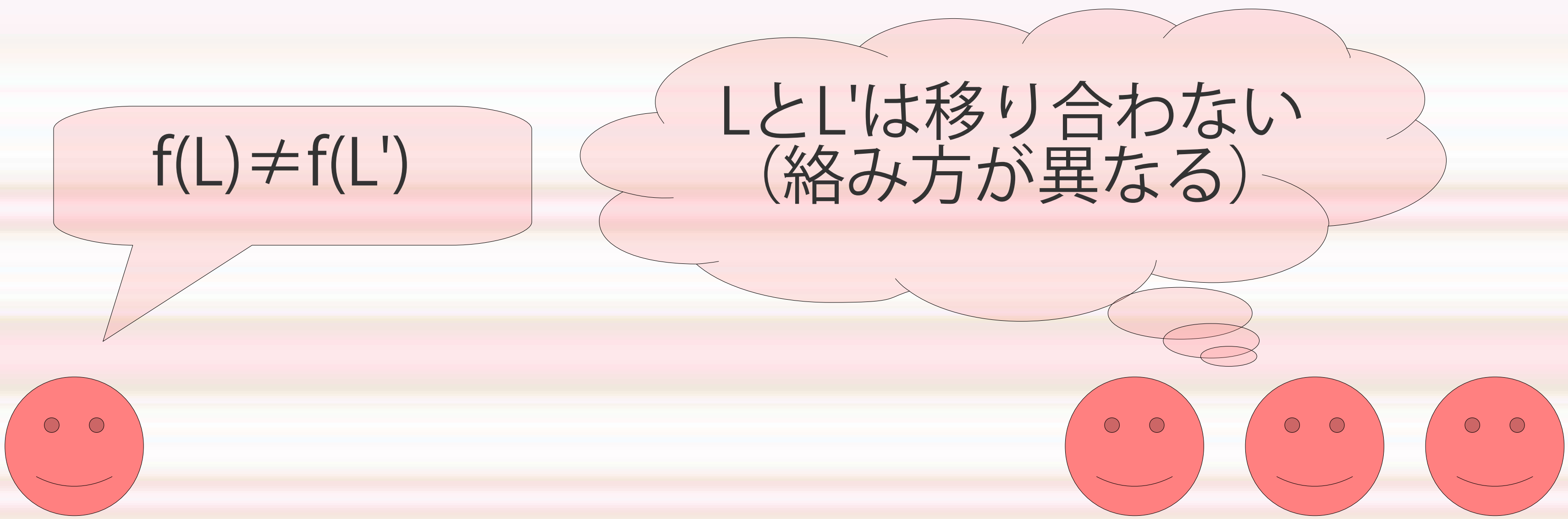
3．結び目の不変量を計算してみよう

不変量：写像 f: {絡み目} → G（整数や多項式などの集まり）

(すなわち, 絡み目Lに対して値f(L)を決めるもの)

であって, L～L'ならば f(L)=f(L') となるもの.

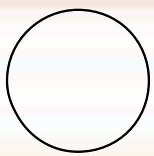
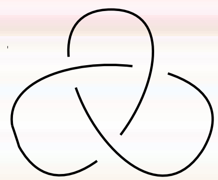
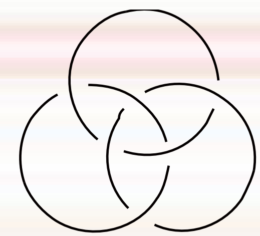
「絡まる」現象を記述するための言語



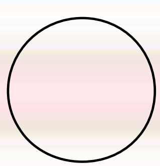
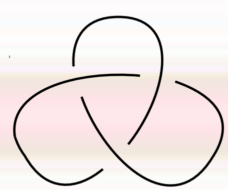
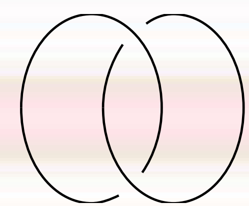
3．結び目の不変量を計算してみよう

〈不変量の例〉

- 成分数 s: {絡み目} → {1, 2, 3, 4, , , }

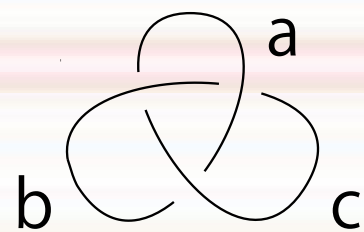
s()=1,　s()=1,　s()=3

- 最小交点数 m: {絡み目} → {0, 1, 2, 3, 4, , , }

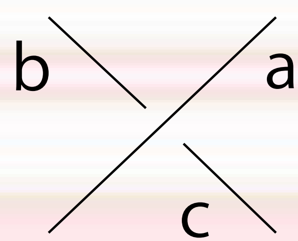
m()=0,　m()=3,　m()=2

p彩色数

①　結び目図式Dの各弧に対して, 0以上p－1以下の整数を配置する.



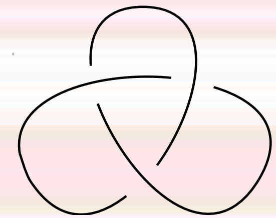
②　各交点のまわりで



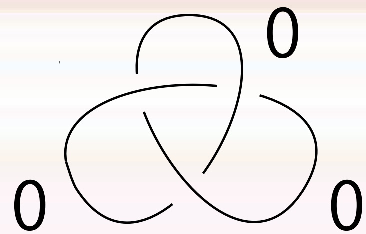
2a=b+c+pn
(2a ≡ b+c, mod p)

となるとき, その配置をDのp彩色と呼ぶ.

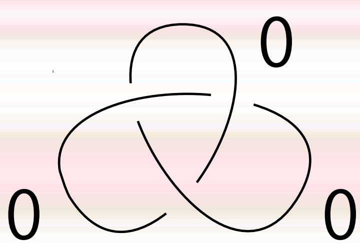
3．結び目の不変量を計算してみよう

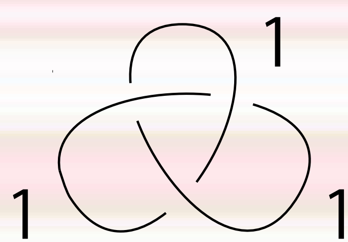
$D =$ 

p＝１のとき,

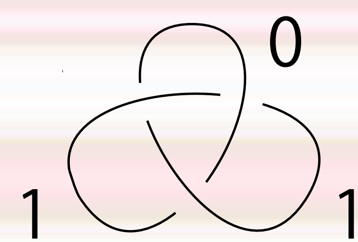


p＝２のとき,





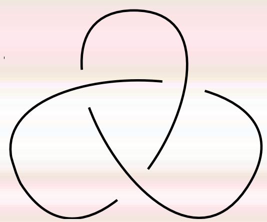
２彩色



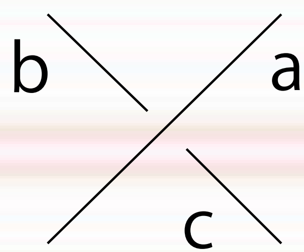
２彩色ではない！

3．結び目の不変量を計算してみよう

ｐ＝３のときを考えてみよう.

やること：  の各弧に０，１，２を配置するすべての方法を列挙する.

ただし各交点で



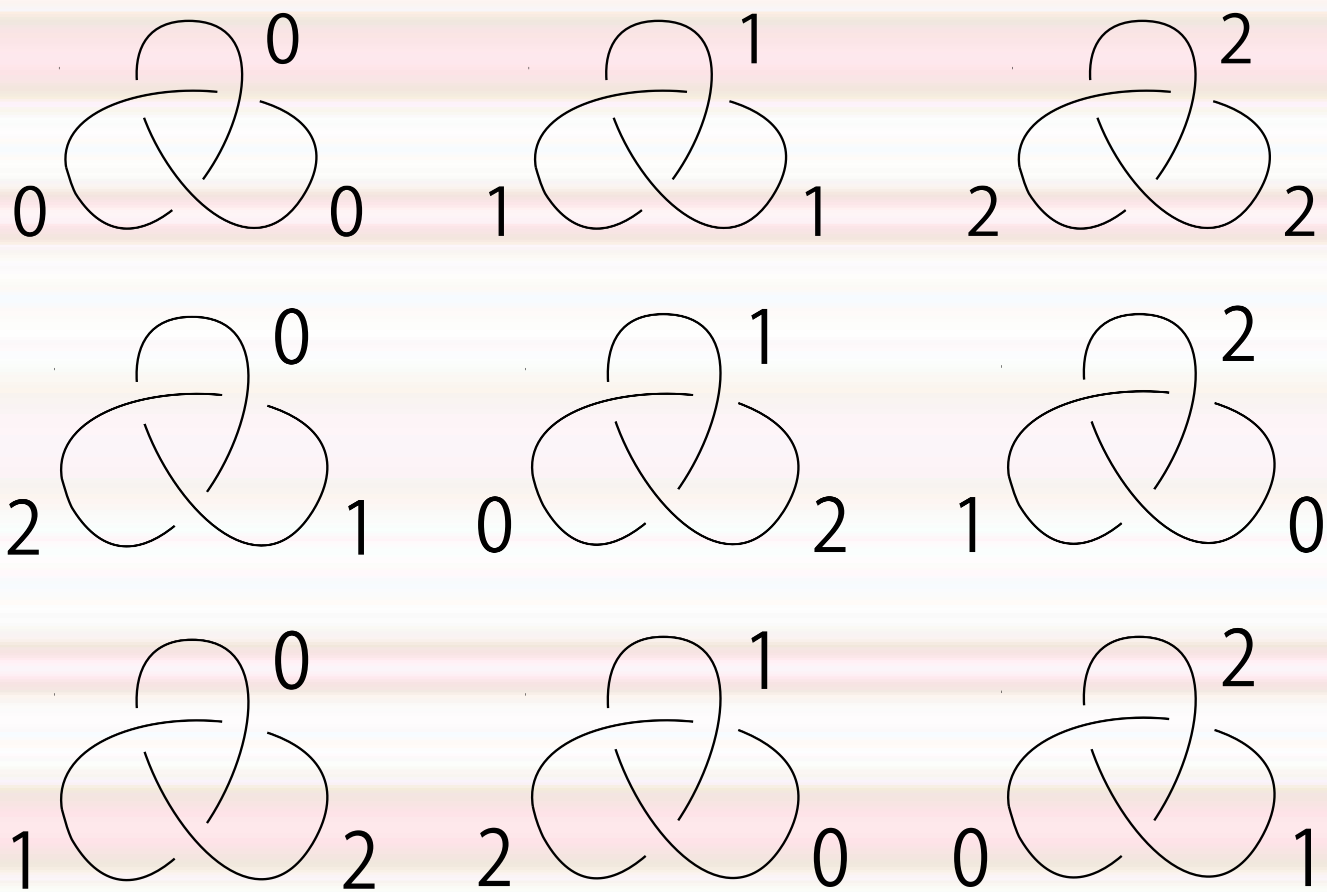
$2a=b+c+3n$

（ｎは整数）であることが条件.

（⇔ 2aとb+cを3で割った余りが同じ．）

3．結び目の不変量を計算してみよう

p＝3のときを計算してみよう.



ｐ彩色数

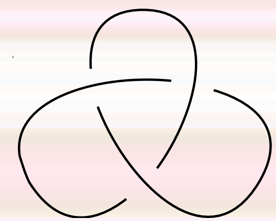
実はｐ彩色の個数はｐの倍数になる．（なぜ？）

ｐ彩色の個数をｐで割った数

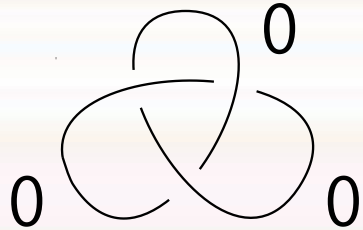
$Cp(D)$=（図式Dのｐ彩色の個数）／p

を図式Dのｐ彩色数と呼ぶ.

3．結び目の不変量を計算してみよう

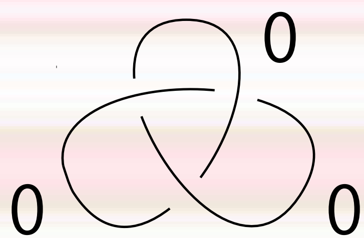
$D=$ 

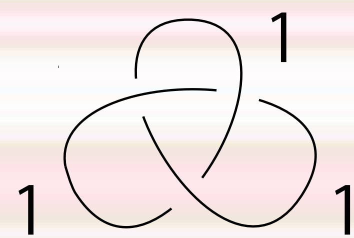
p＝1のとき,



$C1(D)=1$

p＝2のとき,

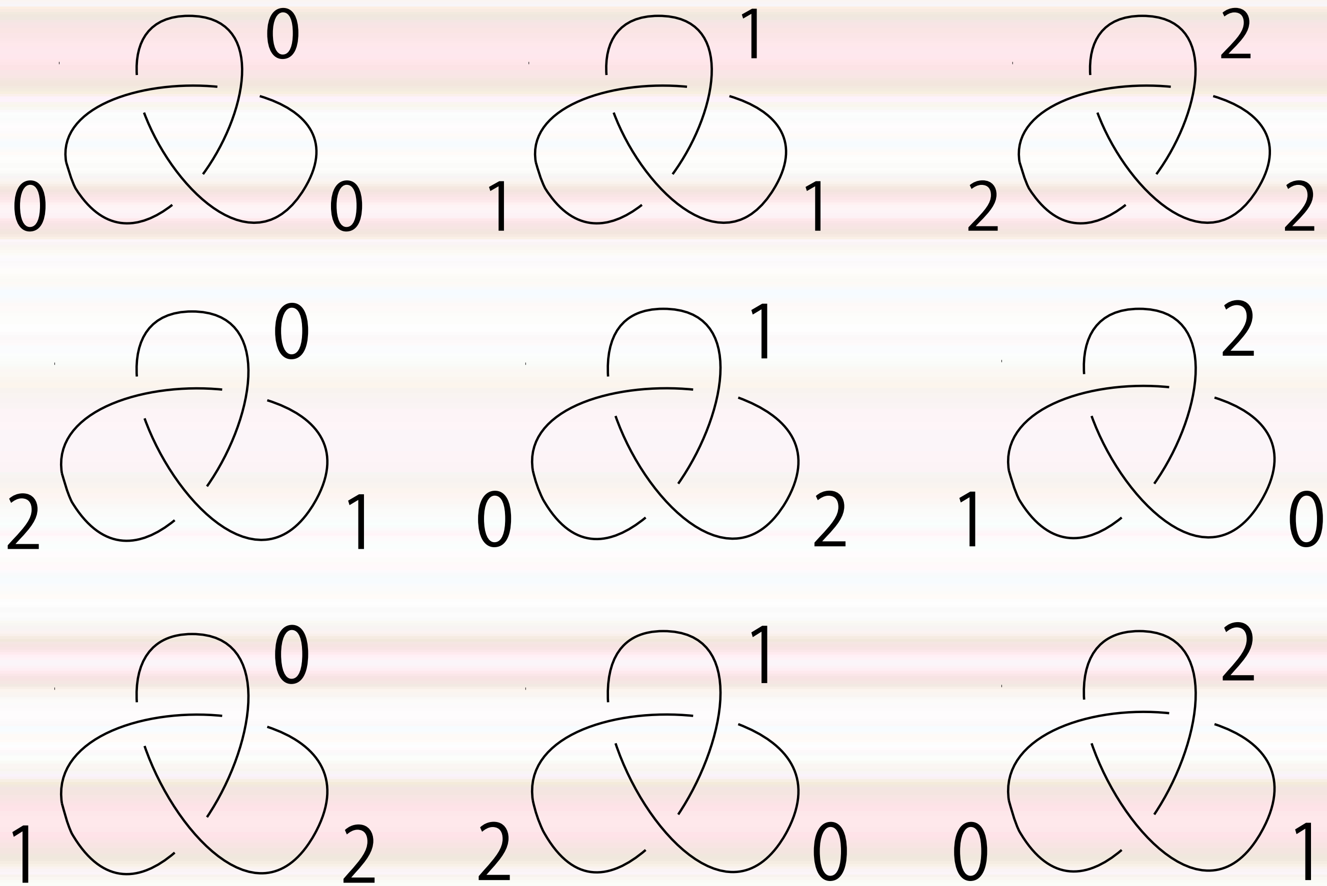




$C2(D)=2/2=1$

3．結び目の不変量を計算してみよう

p＝3のとき,



C3(D) = 9/3=3

3．結び目の不変量を計算してみよう

じつは…p が 3 の倍数でないとき Cp(D) = 1 となり，

p が 3 の倍数のとき Cp(D) = 3 となる.

3．結び目の不変量を計算してみよう

じつは… p が 3 の倍数でないとき $C_p(D)=1$ となり，

p が 3 の倍数のとき $C_p(D)=3$ となる．

なぜ？

４．　私のお話

４．私のお話

１．高校時代の勉強方法

２．なぜ、数学の道を選んだのか

３．数学の魅力や勉強方法

5．まとめ

5．まとめ

1．身の回りの不思議を発掘すべし

2．いろいろやってみるべし

3．人とのつながりを大切にすべし

4．くじけるべからず

5．うきうきするべし

6．よく寝るべし

…

どうもありがとうございました