

中間述語論理 CD について

鹿島 亮 (Ryo Kashima)

東京工業大学 情報理工学研究所 数理・計算科学専攻
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology

直観主義述語論理に公理 $D : \forall x(A \vee B(x)) \rightarrow (A \vee \forall x B(x))$ を加えた論理を CD と呼ぶ。CD は定領域 Kripke モデルに対して完全であり、代表的な中間述語論理（直観主義述語論理と古典述語論理との間に位置する論理）として取り上げられることが多い。CD に対して Craig 補間定理が成り立つか否かは有名な未解決問題である。本稿では CD の完全性、カット除去、補間定理に関して概観する。

1 完全性

「定領域 Kripke モデル」は文献 [5] で初めて (?) 論じられ、CD の証明系（直観主義述語論理 + 公理 D）が定領域 Kripke モデルに対して完全であることは文献 [4] と [11] で独立に証明された（と言われている）。その証明手法は、[11] は極大無矛盾集合を使ってモデルを作る方法、[4] は代数的な方法である。ただし同時期（少し早く）に文献 [17] も、公理 D を持つ constructible falsity（直観主義論理の変種）が定領域モデルに対して完全であることを、極大無矛盾集合を使った方法で示しているのので、これも「初めて完全性を証明した文献」として並べるのが適当と思う。

極大無矛盾集合を使ってモデルを作る完全性証明は、定領域モデルのための工夫が必要であり、[2] や [9] で詳しく解説されている。

タブロー法やシーケント計算を用いた完全性証明、つまり「木状のシーケント」を用いて「証明できないシーケントからモデルをつくる」という手法は、文献 [6]、[8]、[15] でなされている（[6] は constructible falsity に対して）。文献 [1] でも似たようなことがされているようである (?)。

2 カット除去

前述の「木状のシーケントによる完全性証明」で登場する体系はすべてカット無しである。したがって文献 [1]、[8]、[15]（および [6]）は「CD の特殊な体系（木状のシーケント体系）に関するカット除去定理のモデル論的証明」とも考えられる。

それらとは別の（証明論的な）カット除去について，以下で説明する．

一階述語論理の論理式を，述語記号，自由変数記号，束縛変数記号（関数記号） \perp ， \rightarrow ， \wedge ， \vee ， \forall ， \exists から定義する（否定は $\neg A$ を $A \rightarrow \perp$ で代用する）．自由変数を a, b 等で，束縛変数を x, y 等で，項を s, t 等で，論理式を A, B 等で表す． Γ, Δ 等は論理式の有限列を表し， $\Gamma \Rightarrow \Delta$ という形の表現をシーケントと言う．

次のシーケント計算体系を LD と呼ぶ．これが論理 CD に対して最も昔から（文献 [18]）よく知られているシーケント計算である．

公理: $A \Rightarrow A$ および $\perp \Rightarrow A$

推論規則:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \text{ (cut)}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (weakening 左)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \text{ (weakening 右)}$$

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (contraction 左)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \text{ (contraction 右)}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi \Rightarrow \Delta} \text{ (exchange 左)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Sigma} \text{ (exchange 右)}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \rightarrow B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \text{ (}\rightarrow\text{左)} \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B} \text{ (}\rightarrow\text{右)}$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (}\wedge\text{左)} \quad \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (}\wedge\text{左)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} \text{ (}\wedge\text{右)}$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (}\vee\text{左)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} \text{ (}\vee\text{右)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} \text{ (}\vee\text{右)}$$

$$\frac{A(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (}\forall\text{左)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A(x)} \text{ (}\forall\text{右)}^\dagger$$

$$\frac{A(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (}\exists\text{左)}^\dagger \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A(x)} \text{ (}\exists\text{右)}$$

(\dagger 変数条件) (\forall 右), (\exists 左) においては a は下式に現れない自由変数である．

LD の証明の例 :

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{A \vee B(a) \Rightarrow A, B(a)}{\forall x(A \vee B(x)) \Rightarrow A, B(a)} \text{ (}\forall\text{左)}}{\forall x(A \vee B(x)) \Rightarrow A, \forall x B(x)} \text{ (}\forall\text{右)}}{\forall x(A \vee B(x)) \Rightarrow A, C \rightarrow \forall x(B(x) \wedge C)} \text{ (cut)}$$

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{B(a), C \Rightarrow B(a) \wedge C}}{\forall x B(x), C \Rightarrow B(a) \wedge C} \text{ (}\forall\text{左)}}{\forall x B(x), C \Rightarrow \forall x(B(x) \wedge C)} \text{ (}\forall\text{右)}}{\forall x B(x) \Rightarrow C \rightarrow \forall x(B(x) \wedge C)} \text{ (}\rightarrow\text{右)}$$

LD では (\rightarrow 右) 規則だけが「シーケントの右辺に一つの論理式しか現われない」という形になっている。(V右) 規則にもこの制限を課した体系をしばしば LJ' と呼ぶ。これは直観主義論理の体系である。また、よく知られているように、すべての規則の右辺を一つに制限したものが LJ — 直観主義論理であり、逆にこの制限をすべて無くしたものが LK — 古典論理である。

LK, LJ, LJ' ではカット除去が成り立つが、LD ではカット除去定理が成り立たない(文献 [13], [14] 等) たとえば上記の例が cut を使わないと証明できないシーケントである。

文献 [12] は「JSL にもこんなひどい論文が載るのか!？」という驚きの劣悪論文である。これは「(1) LD (と類似の体系) のカット除去が成り立ち、(2) それを使って標準的な方法で Craig 補間定理が証明できる」と主張した、証明の詳細は一切書かれていない短い論文である。しかし実際に証明を始めると破綻する。(1) の反例は上記のものであり、仮に (1) が正しいと仮定しても、(2) はうまくいかない(これについては次節で説明する)。見込みだけ書いたようなこんな論文に欺かれる査読者も困ったものである。文献 [13] は、(1) の反例を挙げ(しかし自分の非を認めるような殊勝な態度は読み取れない)、それを発展させて「LD に有限個の普通の規則をどのように付け加えても、CD のカット無し体系は作れない」ということを示している。

文献 [7] では「シーケントの左辺と右辺の各論理式の依存関係を用いて (\rightarrow 右) 規則の右辺に複数の論理式を許す」という方法で、LD を拡張してカット無しの CD の体系を作ることに成功した。以下ではその体系 (CLD と呼ぶ) を [7] とは見かけ上異なる方法で定義する。

(自然数の) 有限集合のことを「ラベル」と呼び、 α, β 等で表す。 $\alpha: A$ という形を「ラベル付論理式」と呼び、 Γ, Δ 等はラベル付論理式の有限列を表す。ラベルに関して次の関係、演算を定義する。

- $\alpha \sim \beta \iff \alpha \cap \beta \neq \emptyset$
- $\alpha \sim \Delta \iff \exists (\beta: B) \in \Delta [\alpha \sim \beta]$
- $\Gamma \sim \Delta \iff \exists (\alpha: A) \in \Gamma, \exists (\beta: B) \in \Delta [\alpha \sim \beta]$
- $\tau[\beta \leftarrow +\alpha] = \begin{cases} \tau \cup \alpha & \text{if } \tau \sim \beta \\ \tau & \text{if } \tau \not\sim \beta \end{cases}$

CLD はラベル付論理式からなるシーケントを推論する体系で、次の公理と規則から成る。関係 \sim は右辺と左辺の論理式の依存関係を表しており、これを使って (\rightarrow

右) 規則を「左辺の A が, 右辺の複数の論理式の中で B 以外には依存関係がないときには, $A \rightarrow B$ を導いてもよい」としているところがポイントである.

公理: $\{n\}: A \Rightarrow \{n\}: A$ および $\{n\}: \perp \Rightarrow \{n\}: A$

推論規則

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \beta: A \quad \alpha: A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma[\beta \leftarrow +\alpha], \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \text{ (cut)}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha: A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (weakening 左)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha: A} \text{ (weakening 右)}$$

$$\frac{\alpha: A, \beta: A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \cup \beta: A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (contraction 左)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha: A, \beta: A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \cup \beta: A} \text{ (contraction 右)}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha: A, \beta: B, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \beta: B, \alpha: A, \Pi \Rightarrow \Delta} \text{ (exchange 左)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha: A, \beta: B, \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \beta: B, \alpha: A, \Sigma} \text{ (exchange 右)}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \beta: A \quad \alpha: B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\alpha: A \rightarrow B, \Gamma[\beta \leftarrow +\alpha], \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} (\rightarrow \text{左})$$

$$\frac{\beta: A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha: B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha: A \rightarrow B} (\rightarrow \text{右}) \text{ (ただし } \beta \not\sim \Delta \text{ のときのみ)}$$

$$\frac{\alpha: A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha: A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\wedge \text{左}) \quad \frac{\alpha: B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha: A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\wedge \text{右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha: A \quad \Pi \Rightarrow \Sigma, \beta: B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \alpha \cup \beta: A \wedge B} (\wedge \text{右})$$

$$\frac{\alpha: A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \beta: B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\alpha \cup \beta: A \vee B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} (\vee \text{左})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha: A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha: A \vee B} (\vee \text{右}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha: B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha: A \vee B} (\vee \text{右})$$

$$\frac{\alpha: A(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha: \forall x A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} (\forall \text{左}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha: A(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha: \forall x A(x)} (\forall \text{右})^\dagger$$

$$\frac{\alpha: A(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha: \exists x A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} (\exists \text{左})^\dagger \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha: A(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha: \exists x A(x)} (\exists \text{右})$$

(\dagger 変数条件) (\forall 右), (\exists 左) においては a は下式に現れない自由変数である.

CLD の証明の例 (LD では cut が必要だったシーケント):

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\{1\}: A \vee B(a)}{\{1\}: \forall x(A \vee B(x))} (\forall \text{左}) \quad \{2\}: C \Rightarrow \{2\}: C}{\{1\}: \forall x(A \vee B(x)), \{2\}: C \Rightarrow \{1\}: A, \{1, 2\}: B(a) \wedge C} (\wedge \text{右})}{\{1\}: \forall x(A \vee B(x)), \{2\}: C \Rightarrow \{1\}: A, \{1, 2\}: \forall x(B(x) \wedge C)} (\forall \text{右})} (\rightarrow \text{右})$$

$$\frac{\{1\}: \forall x(A \vee B(x)) \Rightarrow \{1\}: A, \{1, 2\}: C \rightarrow \forall x(B(x) \wedge C)}{\{1\}: \forall x(A \vee B(x)) \Rightarrow \{1\}: A, \{1, 2\}: C \rightarrow \forall x(B(x) \wedge C)} (\rightarrow \text{右})$$

文献 [7] では次のことを証明した.

- CLD のカット除去定理 .
- CLD が CD の体系になっていること (すなわち, $CD \vdash A$ iff $CLD \vdash \Rightarrow \alpha : A$ for some α .)
- LD で, cut の形を制限できること .

またこれらを使って論理 CD のいくつかの性質を明らかにした .

3 補間定理

次の主張を, 論理 L に関する Craig 補間定理と呼ぶ .

$L \vdash A \rightarrow B$ ならば, 次を満たす C が存在する :

- $L \vdash A \rightarrow C$.
- $L \vdash C \rightarrow B$.
- $\text{Symbol}(C) \subseteq \text{Symbol}(A) \cap \text{Symbol}(B)$.

ただし $\text{Symbol}(X)$ は X 中に出現する述語記号 (及び自由変数, 関数記号) の集合である .

CD に関する補間定理に対しては, これを証明したと主張するいくつかの文献 : [2], [3], [12] が存在する . しかし [12] は前述のように明らかに誤りである . また [2] と [3] の証明 (モデルを使った手法) にはギャップがある, と [16] には書いてある . したがって, CD に関して補間定理が成り立つか否かは未解決である .

LK や LJ のカット除去定理を使って古典論理や直観主義論理の補間定理を導く, いわゆる「前原の方法」とは次のものである (以下では exchange で到達可能なシーケントは同一視する .)

- $LK \vdash \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2$ ならば次を満たす X が存在することを, $\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2$ の cut-free LK-proof に関する帰納法で示す :
 - $LK \vdash \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, X$.
 - $LK \vdash X, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$.
 - $\text{Symbol}(X) \subseteq \text{Symbol}(\Gamma_1, \Delta_1) \cap \text{Symbol}(\Gamma_2, \Delta_2)$.
- $LJ \vdash \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A$ ならば次の満たす X が存在することを, $\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A$ の cut-free LJ-proof に関する帰納法で示す :
 - $LJ \vdash \Gamma_1 \Rightarrow X$.

- $\text{LJ} \vdash X, \Gamma_2 \Rightarrow A.$
- $\text{Symbol}(X) \subseteq \text{Symbol}(\Gamma_1) \cap \text{Symbol}(\Gamma_2, A).$

LD や CLD は右辺が複数なので適用しようとする前者 (LK に対するもの) だが, これは次のようにうまくいかない.

- (1) LD には cut があり, 最後の規則が cut の場合に, 消えてしまった論理式の存在により $\text{Symbol}(X)$ に関する条件が帰納法の仮定から導けない.
- (2) 仮に cut が無いとしても, 公理 $A \Rightarrow A$ に対して $\Gamma_2 = A, \Delta_1 = A$ とするとうまくいかない.
- (3) CLD の場合, たとえば $\Gamma_2 \not\approx \Delta_1$ という条件をつければ (2) は回避できるが, (\rightarrow 左) 規則で主論理式が Γ_1 中にある場合にうまくいかない.

この困難は, CLD の右辺が複数であることから生じている (特に, (\rightarrow 左) の左上式の右辺が複数であること). そこで, 「右辺が常に一つ」で cut 規則無し (ある程度の cut は許してもよい) の体系が望まれる.

そのような試みのひとつが, 文献 [10] に示した ε 記号を使う方法である ([10] の体系は CD よりも強くなってしまいうまくいかなかったが). そのアイデアは次のようである.

(\forall 右) と (\exists 左) の変数条件を撤廃する. したがって, これらの規則の適用においては, 束縛される自由変数と同じ変数が後に残ってしまうことがある. それらの残った変数は後で (\forall 左) か (\exists 右) で束縛することにする. それを制御するのに ε -term, τ -term を用いる.

具体的には, シークエントの右辺は常に一つに制限し, (\forall 右) と (\exists 左) を次のようにする (変数条件は課さない).

$$\frac{\Gamma(a) \Rightarrow A(a)}{\Gamma(\tau x A(x)) \Rightarrow \forall x A(x)} \quad (\forall \text{右}) \qquad \frac{A(a), \Gamma(a) \Rightarrow C(a)}{\exists x A(x), \Gamma(\varepsilon x A(x)) \Rightarrow C(\varepsilon x A(x))} \quad (\exists \text{左})$$

ただし, 項の定義が次のように拡張されている.

$A(a)$ が論理式ならば, $\varepsilon x A(x)$ と $\tau x A(x)$ はともに項である.

この体系での公理 D の証明は次のようになる.

$$\frac{\frac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A \vee \forall x B(x)} \quad (\forall \text{右}) \quad \frac{\frac{B(a) \Rightarrow B(a)}{B(\tau x B(x)) \Rightarrow \forall x B(x)} \quad (\forall \text{右})}{B(\tau x B(x)) \Rightarrow A \vee \forall x B(x)} \quad (\forall \text{左})}{\frac{A \vee B(\tau x B(x)) \Rightarrow A \vee \forall x B(x)}{\forall x (A \vee B(x)) \Rightarrow A \vee \forall x B(x)} \quad (\forall \text{左})}{\Rightarrow \forall x (A \vee B(x)) \rightarrow A \vee \forall x B(x)} \quad (\rightarrow \text{右})$$

ただし，次のような推論を許すと CD を超えてしまう：

$$\frac{\frac{A(a) \Rightarrow A(a)}{A(\tau x A(x)) \Rightarrow \forall x A(x)} (\forall\text{右})}{\Rightarrow A(\tau x A(x)) \rightarrow \forall x A(x)} (\rightarrow\text{右})$$

$$\frac{\Rightarrow A(\tau x A(x)) \rightarrow \forall x A(x)}{\Rightarrow \exists y (A(y) \rightarrow \forall x A(x))} (\exists\text{右})$$

これを許さないために規則に工夫を加えて，CD の「右辺が一つで cut-free な体系」を作る事ができれば，大きな前進である．

参考文献

- [1] Camillo Fiorentini and Pierangelo Miglioli, *A cut-free sequent calculus for the logic of constant domains with a limited amount of duplications*, **Logic Journal of the Interest Group in Pure and Applied Logics**, **7**, 733-753, (1999).
- [2] Dov M. Gabbay, *Craig interpolation theorem for intuitionistic logic and extensions*, **Journal of Symbolic Logic**, **42**, 269-271, (1977) .
- [3] Dov M. Gabbay, **Semantical Investigations in Heyting's Intuitionistic Logic**, (D. Reidel, 1981).
- [4] Sabine Görnemann, *A logic stronger than intuitionism*, **Journal of Symbolic Logic**, **36**, 249-261, (1971).
- [5] Andrzej Grzegorzcyk, *A philosophically plausible formal interpretation of intuitionistic logic*, **Indagationes Mathematicae**, **26**, 596-601, (1964).
- [6] Ichiro Hasuo and Ryo Kashima, *Kripke Completeness of First-Order Constructive Logics with Strong Negation*, **Logic Journal of the Interest Group in Pure and Applied Logics**, **11**, 615-646 (2003).
- [7] Ryo Kashima and Tatsuya Shimura, *Cut-elimination theorem for the logic of constant domains*, **Mathematical Logic Quarterly**, **40**, 153-172 (1994).
- [8] 鹿島 亮, 非古典論理のシーケント計算 — 完全性定理のシーケント計算による証明, 日本数学会 数学基礎論分科会 1999 年度年会 特別講演 (アブストラクト集 49-67).
<http://www.is.titech.ac.jp/~kashima/pub/Mar99.pdf>
- [9] 鹿島 亮, 中間述語論理 CD の完全性証明, (セミナー資料, 2002).
<http://www.is.titech.ac.jp/~kashima/manuscript/02Sept.pdf>

- [10] Ryo Kashima, *A cut-free sequent calculus with ε -symbols*, **Proceedings of the 36th MLG Meeting**, (2002).
<http://www.is.titech.ac.jp/~kashima/pub/02-Dec-MLG.pdf>
- [11] D. Klemke, (Dissertation, Freiburg, 1969).
- [12] E.G.K.López-Escobar, *On the interpolation theorem for the logic of constant domains*, **Journal of Symbolic Logic**, **46**, 87-88, (1981) .
- [13] E.G.K.López-Escobar, *A second paper “on the interpolation theorem for the logic of constant domains”*, **Journal of Symbolic Logic**, **48**, 595-599, (1983).
- [14] Takashi Nagashima, *An intermediate predicate logic*, **Hitotsubashi Journal of Arts and Sciences**, **14**, 53-58, (1973).
- [15] 小野寛晰, LD について, (セミナー資料, 1976).
- [16] Hiroakira Ono, *Some problems in intermediate predicate logics*, **Reports on Mathematical Logic**, **21**, 55-67, (1987).
- [17] Richmond H. Thomason, *A semantical study of constructible falsity*, **Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik**, **15**, 247-257 (1969).
- [18] Toshio Umezawa, *On logics intermediate between intuitionistic and classical predicate logic*, **Journal of Symbolic Logic**, **24**, 141-153, (1959).