

# 整理券付き待ち行列

車塚 彩菜, 矢島 萌子, 三好 直人

私たちは日々の生活の中で、はじめに番号の書かれた整理券を受け取って、その番号が呼ばれることによってサービスを受けられるようなサービス施設をたびたび利用します。整理券付き待ち行列 (ticket queues) は、このように整理券によって客へのサービスの順番を管理しているサービス施設に対して、その確率的な挙動を表現する数理モデルです。整理券付き待ち行列の最大の特徴は、整理券を受け取っていながらサービスを受けずに去ってしまう客がいるために、整理券番号から知ることのできる待ち人数と実際の待ち人数が異なっていることがあるという点です。本稿では、第 37 回待ち行列シンポジウムにおいて筆者らが発表した内容を中心に、整理券付き待ち行列について解説します。

キーワード：待ち行列理論, マルコフ連鎖, 整理券付き待ち行列, 見かけの待ち行列長, 客の参入放棄

## 1. はじめに

私たちの多くは、たとえば銀行、郵便局、市(区)役所、病院、レストランなどで、はじめに番号の書かれた整理券を受け取って、その番号が呼ばれることによって所望のサービスが受けられるという体験をしたことがあるでしょう。このような整理券システムを採用している施設では、大抵のところサービス中の客の整理券番号が表示されたディスプレイが設置され、待っている客は自分の番が近づいてくるのを確認できるようになっています (図 1 を参照)。

施設がこうした整理券システムを採用することの利点として、客に物理的な列をつくって順番に並んでもらう必要がないという点があげられます。物理的な列がないので列の整理をしなくてすむうえに、複数種類のサービスを提供する場合も複数種類の整理券を用意すれば対応できます。客のほうも呼ばれるまでくつろいで待ち時間を過ごすことができます。ディスプレイにサービス中の客の番号が表示されていれば、自分の番号と照らし合わせておおよその待ち時間を予測できるので、時間があると思えば施設を離れて別の用事を済ませてきても、自分の番までに戻れば何の問題もありません。また、実際に並んでいるところを他人に見られないので、プライバシーの保護にも役立ちます。一方で、実際に客が並んでいる様子が見えないうえに、整理券を受け取っていながらサービスを受けずに去ってしまう客がいるために、実際に待っている客の数が

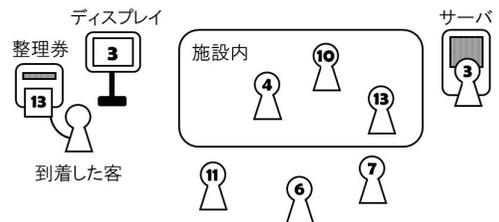


図 1 整理券システムを採用したサービス施設

正確にはわからないという難点があります。今この記事を読んでいる人の中にも、待ち時間に余裕があると思って施設を離れて戻ってきたときに、予想以上に列が進むのが速くて自分の順番が過ぎてしまっていたという経験のある人があるかもしれません。

整理券付き待ち行列 (ticket queues) は、このように整理券によって客へのサービスの順番を管理しているサービス施設に対して、その確率的な挙動を表現する数理モデルです。本稿では、第 37 回待ち行列シンポジウム (2021 年 1 月 25–27 日, オンライン開催) において筆者らが発表した内容 [5] を中心に、整理券付き待ち行列について解説します。

## 2. 整理券付き待ち行列モデル

まず、整理券付き待ち行列のモデルとして、どんなものが考えられるのかを見てみましょう。

前節でも述べたように、整理券付き待ち行列の最大の特徴は、整理券番号から知ることのできる待ち人数が実際に待っている客の数とは異なっていることがあるという点です。本稿では、整理券番号から知ることのできる待ち人数にサービス中の客を加えた数を見かけの待ち行列長、実際の (整理券を受け取っていながらサービスを受けずに去ってしまった客を除いた) 待ち人

くるまづか あやな  
やじま もえこ  
みよし なおと

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系  
〒 152-8552 目黒区大岡山 2-12-1-W8-52

数にサービス中の客を加えた数を実際の待ち行列長と呼ぶことにします。施設によっては、サービス中の客の番号を表示するディスプレイがなく、見かけの待ち行列長さわからないところもありますが、本稿ではそういう施設は考えずに、常にサービス中の客の番号(サービス中の客がいないときは次に発行される整理券の番号)がディスプレイに表示され、客は整理券の番号順にサービスを受けるものとします。また、整理券を受け取る前に見かけの待ち行列長がわかるところもあり、やってきた客が整理券を受け取らずに去ってしまうこともあるかもしれませんが、本稿ではこのような客は無視して、整理券を受け取った客だけを到着客とみなします。

客は施設にやってくると整理券を受け取って見かけの待ち行列長を確認し、それによって、サービスを受けるまで待つか、それともあきらめて施設を去るかなど意思決定をします。本稿では、サービスを受けるために待つことを参入、あきらめて去ってしまうことを参入放棄と呼ぶことにします。たとえば Xu *et al.* [3] は、定常ポアソン過程に従って客が到着し、サービス時間が互いに独立に指数分布に従う単一サーバ待ち行列 (M/M/1 待ち行列) において、到着したときの見かけの待ち行列長がしきい値  $K$  より小さければ参入し、 $K$  以上ならば参入放棄するモデルを考えています。

到着して見かけの待ち行列長を確認したとき、参入するか放棄するかだけではなく、自分の番がすぐには廻ってこないと判断した客は、しばらく施設を離れてまたあとで戻ってこようと思うかもしれません。このように再び戻ってくることを意図していったん施設を離れることを一時離脱と呼ぶことにします。一時離脱をした客は、自分の番まで戻ってこなければサービスを受ける機会を失うかもしれません。Hanukov *et al.* [2] は、参入放棄と一時離脱のある M/M/1 待ち行列モデルを扱っています。すなわち、2つのしきい値  $m$  と  $n$  ( $m < n$ ) があり、到着したときの見かけの待ち行列長が  $m$  以下ならば参入し、 $n$  以上なら参入放棄、そして  $m$  より大きく  $n$  より小さければ一時離脱するというモデルです。一時離脱した客は、指数分布に従う時間が経過すると戻ってきますが、そのときに自分の順番が過ぎていたらサーバが空いている場合を除いてサービスを受けることはできません。

一度は参入すると決めても、やっぱり待ちきれなくなって去ってしまう客もいるでしょう。これを途中放棄と呼ぶことにします。Ding *et al.* [1] は、M/M/1 待ち行列において、すべての客がいったん参入したあと

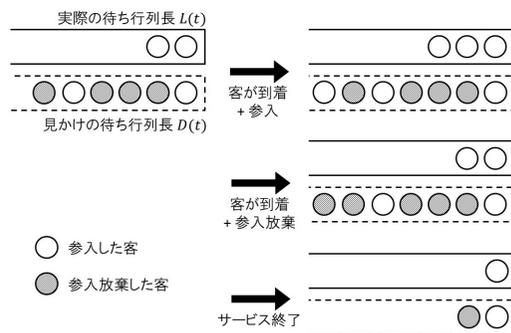


図2 状態の推移

サービスを受けられるまでに、自分より前の見かけの待ち人数に応じた率で途中放棄するモデルを考えています。

Xu *et al.* [3] や Hanukov *et al.* [2] のモデルでは、すべての客の行動が共通のしきい値によって決められています。しかし、見かけの待ち行列長を確認したときの判断の基準は客によって異なるかもしれません。車塚 [4] は、このような客ごとの判断基準の違いを確率を用いて表わしています。すなわち、客が到着したときの見かけの待ち行列長を  $d$  としたとき、その客は確率  $q(d)$  で参入放棄し、確率  $1 - q(d)$  で参入する M/M/1 待ち行列モデルを考えています。このモデルにおいて、 $d < K$  のとき  $q(d) = 0$ 、 $d \geq K$  のとき  $q(d) = 1$  とすると、[3] と同じものが得られます。さらに筆者ら [5] は [4] を一般化して、サービス時間が特定の分布に従うのではなく、独立かつ同一の分布に従うことを仮定した (M/G/1 待ち行列) モデルを解析しています。

### 3. 状態の表現

整理券付き待ち行列では、客の到着やサービスの終了などによって、実際の待ち行列長と見かけの待ち行列長が変化します。しかし、これらの1時点での値だけでは状態の推移を正確に表わすことはできません。このことを図を見ながら確認しましょう。以下では、参入放棄のあるモデルに焦点を当て、一時離脱や途中放棄は扱いません。また、サーバの数が1つの場合に限って話をします。

客が到着して参入すると、実際の待ち行列長と見かけの待ち行列長の両方が1ずつ増加します(図2左から右上の状態)。一方、到着客が参入放棄した場合は、見かけの待ち行列長は1増加しますが、実際の待ち行列長は変わりません(図2左から右中段の状態)。すなわち、時刻  $t$  での実際の待ち行列長と見かけの待ち行

列長をそれぞれ  $L(t), D(t)$  とし、時刻  $t$  に客が到着すると、

$$(L(t), D(t)) = \begin{cases} (L(t-)+1, D(t-)+1), & \text{参入,} \\ (L(t-), D(t-)+1), & \text{参入放棄,} \end{cases}$$

となります。このように、客が到着したときの推移については、その時点での実際の待ち行列長と見かけの待ち行列長だけで表わすことができます。

次に、サービスが終了したときを考えます。このとき、実際の待ち行列長は 1 だけ減少します。では、見かけの待ち行列長はどうでしょう？ サービスを終了したばかりの客とその次に実際に待っている客の間には参入放棄した客がいたかもしれません。参入放棄した客は見かけの待ち行列には (整理券番号のうえでは) 並んでいますが、実際にはいないので、次に実際に待っている客がサービスを受けることとなります。したがって、サービスを終了したばかりの客の整理券番号と次に実際に待っている客の整理券番号の差の分だけ見かけの待ち行列長が減少します。この差を表わす変数を  $n_1(t)$  とすると、サービスの終了時刻  $t$  において、

$$(L(t), D(t)) = (L(t-)-1, D(t-)-n_1(t-))$$

となります。図 2 の左の状態では、先頭の客と次に実際に待っている客の間に参入放棄した客が 3 人いるので、サービスが終了すると見かけの待ち行列長は  $n_1(t-)=3+1=4$  だけ減少して、図 2 の右下の状態になります。

以上のように、サービスが終了したときの状態推移を表わそうとすると、参入したそれぞれの客の間にどれだけ参入放棄した客がいるのかを知っておく必要があります。そこで、 $L(t) \geq 1$  のとき  $k=1, 2, \dots, L(t)$  に対して、 $n_k(t)$  を実際の待ち行列の  $k$  番目に並んでいる客と  $k+1$  番目に並んでいる客の整理券番号の差とします (ここで 1 番目はサービスを受けている客を指します)。ただし、 $n_{L(t)}(t)$  は実際の待ち行列の最後尾に並んでいる客の整理券番号と次に発行される整理券番号の差です。このとき、 $\sum_{k=1}^{L(t)} n_k(t) = D(t)$  が成り立っていることに注意してください。そして、変数  $\mathbf{x}(t)$  を

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} (n_1(t), n_2(t), \dots, n_{L(t)}(t)), & L(t) \geq 1, \\ 0, & L(t) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

と定義します。たとえば、図 2 の左側の状態は  $\mathbf{x}(t) = (4, 2)$  であり、図 3 の状態は  $\mathbf{x}(t) = (4, 3, 2)$  です。この状態変数  $\mathbf{x}(t)$  によって、時刻  $t$  に客の到着またはサービ

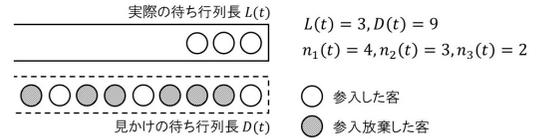


図 3 状態変数

スの終了があったときの状態推移は、

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} (n_1(t-), \dots, n_{L(t-)}(t-), 1), & \text{参入,} \\ (n_1(t-), \dots, n_{L(t-)}(t-)+1), & \text{参入放棄,} \\ (n_2(t-), \dots, n_{L(t-)}(t-)), & \text{サービス終了,} \end{cases} \quad (2)$$

と表わすことができます。ただし、 $L(t-)=1$  のときにサービスが終了すると  $\mathbf{x}(t)=0$  です。

#### 4. モデル化と解析

本節では、筆者ら [5] による確率的な参入放棄のあるモデルを用いて、整理券付き待ち行列のモデル化と解析の手順を紹介します。

##### 4.1 モデル

(1), (2) 式によって、整理券付き待ち行列の状態、そして客の到着時やサービス終了時の状態推移が表現できました。あとは、客の到着やサービス終了の起こるタイミングについての確率分布と参入/参入放棄の意思決定に関する仮定を導入すれば、ひとまずモデルは完成です。

客は率  $\lambda$  の定常ポアソン過程に従って到着するものとします。参入した客のサービス時間については特に確率分布を定めず、互いに独立かつ到着過程とも独立に同一の分布に従うことを仮定します。到着した客は、そのときの見かけの待ち行列長を  $d$  とすると、確率  $q(d)$  で参入放棄し、確率  $1-q(d)$  で参入します。ただし  $q(0)=0$  です。すなわち、見かけの待ち行列長が 0 (このとき実際の待ち行列長も 0) ならば必ず参入します。このモデルは、サービス時間を表わす確率変数を  $G$  として、

$$\limsup_{d \rightarrow \infty} (1 - q(d)) < (\lambda E[G])^{-1}$$

であれば安定であり、定常状態が存在しますが、ここではさらに解析および数値計算を容易にするために、しきい値  $K$  を定めて  $d \geq K$  のとき  $q(d)=1$  とします。すなわち、到着したときの見かけの待ち行列長が  $K$  以上であれば、客は必ず参入放棄します。この  $K$  を最大忍耐レベルと呼ぶことにします。

このモデルにおいて、もしサービス時間が互いに独立に指数分布に従うならば、(1), (2) 式より得られる確率

過程  $\{x(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  は連続時間マルコフ連鎖です。しかし、今はサービス時間に特定の確率分布を仮定していないので、 $\{x(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  が連続時間マルコフ連鎖であるとは言えません。そこで、サービスの終了時刻に着目します。 $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  をサービス終了時刻の列として、 $x_n = x(t_n)$  とすると、サービス時間が独立に同一の分布に従うこと、客の到着が定常ポアソン過程に従うこと、そして客の参入/参入放棄の決定がそのときの見かけの待ち行列長だけに依存していることから、確率過程  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は離散時間マルコフ連鎖になります。

こうして離散時間マルコフ連鎖  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を得ることができました。しかし、これを直接解析することは、最大忍耐レベル  $K$  が大きくなるにつれて難しくなります。まず、(1) 式からわかるように、ベクトル  $x_n$  の次元は  $K$  まで大きくなります。また、 $K$  が大きくなるほど  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  の推移のパターンが増え、推移確率の計算も複雑になります。そこで、やはり実際の待ち行列長と見かけの待ち行列長だけで状態の推移を表現できるような近似モデルを考えることにします。

#### 4.2 近似モデル

これまで見てきたとおり、実際の待ち行列長と見かけの待ち行列長の 1 時点での値だけでは状態の推移を正確に表わすことができません。これを近似的に表わそうとすると、特にサービスが終了したときの状態推移について工夫が必要です。以下では、近似モデルについての記号には \* をつけて表すことにします。たとえば、 $L^*(t)$  は時刻  $t$  における近似モデルの実際の待ち行列長を表します。

近似モデルにおいて、時刻  $t$  での実際の待ち行列長と見かけの待ち行列長の差を  $M^*(t)$  とします。すなわち、 $D^*(t) = L^*(t) + M^*(t)$  です。 $M^*(t)$  は時刻  $t$  に見かけの待ち行列に (整理券番号のうえでは) 並んでいる参入放棄した客の数を表わしています。したがって、時刻  $t$  に客が到着したとき、

$$(L^*(t), M^*(t)) = \begin{cases} (L^*(t-), M^*(t-)), & \text{参入,} \\ (L^*(t-), M^*(t-)+1), & \text{参入放棄,} \end{cases}$$

と推移します。たとえば図 4 では、客の到着直前で  $(L^*(t-), M^*(t-)) = (2, 3)$  なので、到着客は確率  $q(5)$  で参入放棄して  $(L^*(t), M^*(t)) = (2, 4)$  になり、確率  $1-q(5)$  で参入して  $(L^*(t), M^*(t)) = (3, 3)$  になっています。

次に、時刻  $t$  にサービスが終了したときの  $L^*(t)$ ,  $M^*(t)$  の推移を、

$$L^*(t) = L^*(t-) - 1,$$

4 (4)

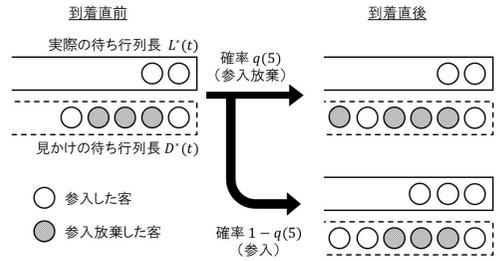


図 4 到着時における近似モデルの状態推移

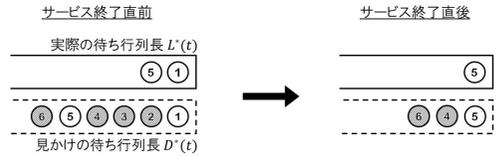


図 5 サービス終了時における近似モデルの状態推移

$$M^*(t) = M^*(t-) - \left\lfloor \frac{M^*(t-)}{L^*(t-)} \right\rfloor \quad (3)$$

と定めます。ここで、 $\lfloor a \rfloor$  は正の数  $a$  の小数点以下を四捨五入した値を表わします ( $\lfloor a \rfloor = \lfloor a + 1/2 \rfloor$ )。 (3) 式は、参入放棄した客が参入したそれぞれの客の後ろに均等にいることを仮定したものです。たとえば図 5 では、サービス終了の直前で  $(L^*(t-), M^*(t-)) = (2, 4)$  であり、参入放棄した客がサービス終了直前の客の後ろに 3 人、次に実際に待っている客の後ろに 1 人いるので、本当ならサービス終了後は状態 (1, 1) に推移するところですが、近似モデルでは実際にいる 2 人の客の後ろに 2 人ずつ参入放棄した客がいると仮定して、サービス終了後は  $(L^*(t), M^*(t)) = (1, 2)$  になっています。

さらに、解析および数値計算を容易にするために、サービス終了直後の  $M^*(t)$  の値を  $K-1$  で打ち切ってしまう。すなわち、(3) 式を

$$M^*(t) = \min \left\{ M^*(t-) - \left\lfloor \frac{M^*(t-)}{L^*(t-)} \right\rfloor, K-1 \right\}$$

と変更します。こうして得られた  $y^*(t) = (L^*(t), M^*(t))$  に対して、(近似前の元のモデルと同様に) サービス終了時刻に着目して  $y_n^* = (L^*(t_n), M^*(t_n))$  とすると、 $\{y_n^*\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は 2 次元離散時間マルコフ連鎖であり、その状態空間  $\mathcal{S}$  は、

$$\mathcal{S} = \{(0, 0)\} \cup \{(\ell, m); \ell = 1, 2, \dots, K-1, m = 0, 1, \dots, K-1\} \quad (4)$$

となります。

#### 4.3 近似モデルの解析

それでは、前節で得られたマルコフ連鎖  $\{y_n^*\}_{n \in \mathbb{Z}}$  のオペレーションズ・リサーチ

定常分布を求めましょう。それによって、近似モデルの定常状態におけるサービス終了直後の実際の待ち行列長や見かけの待ち行列長の確率分布を調べることができます。

$(i, m), (j, n) \in \mathcal{S}$  に対して,  $\{y_n^*\}_{n \in \mathbb{Z}}$  が状態  $(i, m)$  から  $(j, n)$  へ推移する確率を  $p_{(i,m),(j,n)}$  とします。この  $p_{(i,m),(j,n)}$  の具体的な表現は, 1 人のサービス時間中に客が何人やって来るのか, その中でどの人が参入し, どの人が参入放棄するのかを考えれば求められるので, ここでは割愛します ([5] を参照)。そして,  $y_n^* = (L^*(t_n), M^*(t_n))$  の第 1 成分 (実際の待ち行列長) が  $i$  から  $j$  に推移する確率を並べた部分行列を  $\mathbf{P}_{i,j} = (p_{(i,m),(j,n)})_{m,n=0}^{K-1}$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, K-1$ , とします。ただし, (4) 式の状態空間を見てもわかるとおり,  $\mathbf{P}_{i,j}$  が  $K \times K$  正方形行列なのは  $i, j \neq 0$  のときだけで,  $\mathbf{P}_{0,0} = p_{(0,0),(0,0)}$  であり,  $\mathbf{P}_{i,0}$  は  $K$  次元列ベクトル,  $\mathbf{P}_{0,j}$  は  $K$  次元行ベクトルです。また, 客のサービス終了時刻に着目しているので,  $y_n^*$  の第 1 成分 (実際の待ち行列長) は 1 ステップで高々 1 しか減少しません。よって,  $i > j+1$  に対して  $\mathbf{P}_{i,j} = \mathbf{O}$  (零行列または零ベクトル) であることがわかります。

$s \in \mathcal{S}$  に対して, 定常状態において  $y_n^* = s$  である確率を  $\pi_s$  としましょう。そして,  $\ell = 0, 1, \dots, K-1$  に対して, 定常状態において  $y_n^*$  の第 1 成分 (実際の待ち行列長) が  $\ell$  である確率を並べた行ベクトルを  $\boldsymbol{\pi}_\ell = (\pi_{(\ell,0)}, \pi_{(\ell,1)}, \dots, \pi_{(\ell,K-1)})$  とします。ただし,  $\boldsymbol{\pi}_0 = \pi_{(0,0)}$  であることに注意してください。そうすると, 離散時間マルコフ連鎖の平衡方程式から ( $i > j+1$  に対して  $\mathbf{P}_{i,j} = \mathbf{O}$  であることに注意して),

$$\boldsymbol{\pi}_\ell = \sum_{i=0}^{\min\{\ell+1, K-1\}} \boldsymbol{\pi}_i \mathbf{P}_{i,\ell}, \quad \ell = 0, 1, \dots, K-1, \quad (5)$$

が得られます。

(5) 式のベクトル方程式を解くために, まず行列  $\mathbf{R}_{i,j}$ ,  $0 \leq i < j \leq K-1$ , を次のように  $j = K-1$  から遡って再帰的に定義します。

$$\mathbf{R}_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{P}_{i,K-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{K-1,K-1})^{-1}, & j = K-1, \\ (\mathbf{P}_{i,j} + \mathbf{R}_{i,j+1} \mathbf{P}_{j+1,j}) \\ \times (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{j,j} - \mathbf{R}_{j,j+1} \mathbf{P}_{j+1,j})^{-1}, & \text{その他.} \end{cases}$$

ここで  $\mathbf{I}$  は単位行列です。そうすると単純な式変形によって, ベクトル方程式 (5) から,

$$\boldsymbol{\pi}_\ell = \sum_{i=0}^{\ell-1} \boldsymbol{\pi}_i \mathbf{R}_{i,\ell}, \quad \ell = 1, 2, \dots, K-1,$$

が導かれます。あとはこれを解けば良いのですが, ひとまず  $\mathbf{q}_0 = 1$  とおいて,  $K$  次元行ベクトル  $\mathbf{q}_\ell$ ,  $\ell =$

$1, 2, \dots, K$ , を,

$$\mathbf{q}_\ell = \sum_{i=0}^{\ell-1} \mathbf{q}_i \mathbf{R}_{i,\ell}, \quad \ell = 1, 2, \dots, K-1,$$

によって順々に求めれば, 正規化条件 ( $\sum_{i=0}^{K-1} \|\boldsymbol{\pi}_i\| = 1$ ) から,

$$\pi_{(0,0)} = \left( \sum_{i=0}^{K-1} \|\mathbf{q}_i\| \right)^{-1}, \\ \boldsymbol{\pi}_\ell = \pi_{(0,0)} \mathbf{q}_\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots, K-1,$$

として定常分布が得られます。ここで,  $\|\mathbf{x}\|$  はベクトル  $\mathbf{x}$  の要素の総和を表します。

こうして得られた  $\{y_n^*\}_{n \in \mathbb{Z}}$  の定常分布  $\{\pi_s\}_{s \in \mathcal{S}}$  を用いると, 近似モデルの定常状態におけるサービス終了直後の実際の待ち行列長  $L^*$  と見かけの待ち行列長  $D^*$  の確率分布が次のように求められます。

$$P(L^* = \ell, D^* = d) = \begin{cases} \pi_{(0,0)}, & \ell = d = 0, \\ \pi_{(\ell,d-\ell)}, & 1 \leq \ell \leq d \leq K-1, \\ 0, & \text{その他,} \end{cases}$$

$$P(L^* = \ell) = \begin{cases} \pi_{(0,0)}, & \ell = 0, \\ \sum_{m=0}^{K-1} \pi_{(\ell,m)}, & 1 \leq \ell \leq K-1, \\ 0, & \text{その他,} \end{cases} \\ P(D^* = d) = \begin{cases} \pi_{(0,0)}, & d = 0, \\ \sum_{\ell=1}^d \pi_{(\ell,d-\ell)}, & 1 \leq d \leq K-1, \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

## 5. 数値実験

前節で提案した近似モデルの妥当性を確かめるため, 4.3 節の解析結果を基に数値計算を行い, その結果を元の (近似前の) モデルに対して行ったシミュレーションの結果と比較してみましょう。

数値実験を通して, トラフィック強度  $\rho = \lambda E[G]$  は 0.7, 0.8, ..., 1.3 の 7 通り, 最大忍耐レベルは  $K = 10$  と  $K = 20$  の 2 通りです。また, 参入放棄の確率は次のとおり設定しています。

$$q(d) = \begin{cases} d/K, & d < K, \\ 1, & d \geq K. \end{cases}$$

図 6 はサービス時間が 3 次のアーラン分布に従う場合, 図 7 はサービス時間が一定の場合の計算結果をプロットしたものです。これらの図から, 実際の待ち行列長も見かけの待ち行列長も, すべての場合において近似モデルと元のモデルがおおむね近い値をとっていることが確認できます。

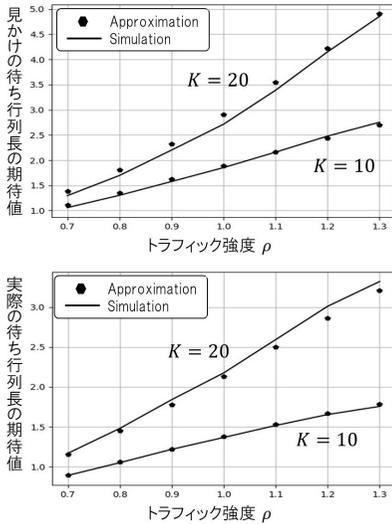


図6 サービス時間が3次のアーラン分布に従う場合

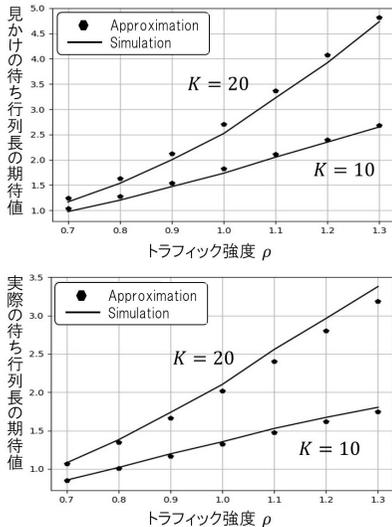


図7 サービス時間が一定の場合

## 6. おわりに

本稿では、整理券付き待ち行列について解説しました。ここでは、参入放棄のあるモデルを対象に解析の手順や数値計算結果を紹介しましたが、一時離脱や途中放棄のあるモデルなど、他にも多くのモデルが考えられます。また、到着時の意思決定に関して、マルコフ決定過程などを用いた定式化を考えることもできるでしょう。本稿によって、整理券付き待ち行列に興味を持つ人が1人でも増えれば、筆者らも嬉しく思います。

### 謝辞

本稿の執筆にあたり、待ち行列研究会主査の河西憲一氏、担当編集委員の佐久間大氏にはたいへんお世話になりました。どうもありがとうございました。

実は、待ち行列シンポジウムでは(3)式とは異なる近似を発表したのですが、発表の後で数人のシンポジウム参加者と話す機会があり、その際に(3)式の近似に繋がるヒントをいただきました。東京都立大学の山下英明氏をはじめ、議論に参加していただいた方々に、この場をお借りして感謝の意を表します。

### 参考文献

- [1] D. Ding, J. Ou, and J. Ang, "Analysis of ticket queues with reneging customers," *Journal of the Operational Research Society*, **66**, pp. 231–246, 2015.
- [2] G. Hanukov, S. Anily, and U. Yechiali, "Ticket queues with regular and strategic customers," *Queueing Systems*, **95**, pp. 145–171, 2020.
- [3] S. H. Xu, L. Gao, and J. Ou, "Service performance analysis and improvement for a ticket queue with balking customers," *Management Science*, **53**, pp. 971–990, 2007.
- [4] 車塚彩菜, "確率的な参入放棄のある整理券付き待ち行列の解析," 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2020 年春季研究発表会アブストラクト集, pp. 112–113, 2020.
- [5] 車塚彩菜, 矢島萌子, 三好直人, "確率的な参入放棄のある整理券付き M/G/1 待ち行列の解析," 2020 年度待ち行列シンポジウム報文集, pp. 109–118, 2021.