セルラネットワークの空間点過程モデル

三好 直人

最近，空間点過程を用いて無線通信ネットワークをモデル化し，そのモデルの解析を通して性能評価につなげようという研究が活発に行われています．この背景には，無線通信ネットワークの性能が無線ノードの互いの位置関係に大きく依存すること，そして無線ノードは規則正しく配置されているわけではなく，一見ランダムに配置されているように見えること等があります．本稿では，こうした無線通信ネットワークの点過程モデルの中でも，特にセルラネットワークを取り上げ，その解析例を紹介します．他の無線通信ネットワークについても，無線電波の伝搬の仕組は同じですから，基本的なところでは同様の考え方が適用できます．

キーワード：無線通信，空間点過程，セルラネットワーク，信号対干渉・雑音比，被覆確率

1. はじめに

最近，空間点過程 (と言っても主に 2 次元平面上ですが) を用いて無線通信ネットワークをモデル化し，そのモデルの解析を通して性能評価につなげようという研究が活発に行われており，解説・サーベイ論文 [1, 2, 3] や専門書 [4, 5, 6] も次々に発表されています．これは，多数の無線ノード (ケータイの基地局や端末等) の位置を空間点過程によって表し，そうして作った確率モデルを点過程や確率幾何学の理論を駆使して解析しようというものです．この背景には，無線通信ネットワークの性能が無線ノードの互いの位置関係に大きく依存すること，そして無線ノードは規則正しく配置されているわけではなく，一見ランダムに配置されているように見えること等があります．では，どうして無線通信ネットワークの性能がノードの相対位置に依存するのでしょう? それは，無線電波を受信するノードは通信相手のノードからの電波だけでなく，その他の同じ周波数を用いているノードからの電波も受信し，これが通信相手からの電波と干渉してしまうという問題があるのですが，これらの電波は，建造物等による反射や回折等の影響で変動があるものの，送信ノードからの距離に応じてだんだん弱くなるからです．したがって，無線ノードの配置の不規則さが受信電波の強弱に与える影響，ひいてはネットワークの性能に与える影響を考慮するために，空間点過程が利用されるというわけです．

本稿では，こうした無線通信ネットワークの空間点過程モデルについて，特にセルラネットワークを例に取り上げて紹介し，基本的な仮定のもとでの解析手順を説明します．他の (例えばアドホックネットワーク等の) 無線通信ネットワークに対しても，無線電波の伝搬の仕組は同じですから，基本的なところでは同様の考え方が適用できます．あっ！ それから本特集のテーマは「待ち行列理論—最近の話題から—」ですが (でしたっけ?)，本稿の内容は待ち行列とはあまり関係がありません．ただ，待ち行列に対して点過程アプローチ [7] をしていた研究者の中に，最近この分野に参入して来ている人達が (筆者も含めて) 少なからずいるのは間違いありません．

2. セルラネットワークとは?

まず，セルラネットワークについて簡単に説明しましょう．ここでは本当に必要最小限のことしか書きませんので，詳しく知りたい方は専門書 (例えば [8, 9] 等) をご参照ください．セルラネットワークとは，ひとことで言うと，セルラ方式を採用した無線通信ネットワークのことです．では，セルラ方式がどんなものかと言うと，通信サービスを提供する広いエリアをセルと呼ばれる比較的小さな区画に分割し，それぞれのセルに専用の基地局を置いて，各基地局が自分のセル内にある端末と無線通信を行うという方式であり (図 1 参照)，皆さんが持っているケータイでもこの方式が採用されています．基地局間の通信は有線で行われるので，端末とそれに対応する基地局との間の通信だけが無線区間です．この方式の利点としては，(i) 異なるセルで同じ周波数を使うことができるので，限られた周波数資源を有効に活用して，多くの通信回線を確保できる，(ii) 無線通信をする距離が短くて済むので，小

みよし　なおと
東京工業大学 大学院情報理工学研究科
〒 152–8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-52

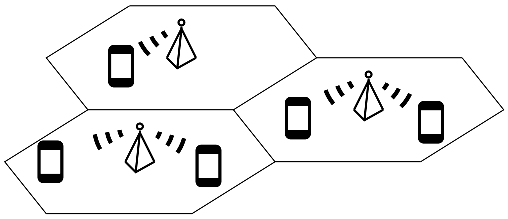

図 1　セルラネットワークのイメージ

さな送信電力で通信できる，等が挙げられます．

さて，上のように書くと，セルへの分割を先にして，その後で定められた個々のセルに基地局を設置するように思うかもしれませんが，実際には基地局の配置と種類によってセルが定まります．例えば，基地局が密集しているところではセルは小さくなり，疎なところでは大きくなります．それなら規則正しく基地局を並べて，どのセルも均等になるようにするのが理想かもしれませんが，地理的な要因もあって不規則な基地局の配置が現れます．また，大きな送信電力で強い電波を発信する基地局は広い範囲をカバーできるので，その分セルも大きくなり (マクロセル)，逆に，送信電力の小さな基地局のセルは小さくなります (ピコセルやフェムトセル)．そこで，多くの人が集まる等で需要が大きくなるところに送信電力の小さな基地局をたくさん設置して，多くの回線を確保するといった工夫がなされ，その結果，セル配置の様子はますます複雑になります．さらに，端末での受信電波の時間的な変動によって，一般にはセルの境界も時間的に変動しています．

3.　空間点過程モデル

では，さっそくセルラネットワークの空間点過程モデルを紹介しましょう．ここでは下りリンク，すなわち基地局から端末への通信のモデルを考えます．以下では，$\mathbb{R}$ を実数の集合，$\mathbb{Z}$ を整数の集合，そして $\mathbb{N}$ を自然数の集合とします．また，P は確率，E は期待値を表すものとします．

$\Phi = \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を 2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点過程として，確率 1 で単純であると仮定します．すなわち，各 $i \in \mathbb{N}$ に対して X_i は $\mathbb{R}^2$ に値をとる確率変数で，$i \neq j$ なら $X_i \neq X_j$ です．ここで，添字の付け方には (1 次元の点過程 [7] と違って) 特に約束はありません．この点過程 $\Phi = \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ の各点が基地局の位置を表しているものとして，地点 X_i にある基地局を基地局 i と呼ぶことにします．また，基地局 i から発信される電波の送信電力を p_i (> 0) として，その周波数帯域はすべて同じであると仮定します．基地局で発信された電波は距離に応じてだんだん弱くなりますが，これを**伝搬損失関数** ℓ で表します．関数 ℓ はべき乗則 $\ell(r) \sim c\,r^{-\beta}$ $(r > 0)$ にしたがうことが知られており，定数 c (> 0) は伝搬損失係数，β (> 2) は伝搬損失指数と呼ばれます．定数 β の値は，平坦な地域で何も障害がなければ 2 に近く，都市部では 3 ∼ 4 くらいです．さらに，無線電波は建造物等の影響や，端末自身を動かすことによっても変動します．こうした無線電波の変動にはシャドウィングと呼ばれるものとフェイディングと呼ばれるものがあるのですが，詳しい説明は省略します (詳しくは [9] 等を参照)．シャドウィングには対数正規分布が仮定されることが多い一方，フェイディングには包絡線変動にレイリー分布 (次数 2 のワイブル分布) が仮定されることが多く，それゆえ受信電力の変動 (包絡線変動の 2 乗) は指数分布にしたがいます (レイリー・フェイディングといいます)．

いま，地点 $x \in \mathbb{R}^2$ にある端末に着目し，基地局 i から地点 x への電波に対する時刻 $n \in \mathbb{Z}$ でのフェイディングを表す確率変数を $H_{i,x}(n)$，同じくシャドウィングを表す確率変数を $S_{i,x}(n)$ とします．このとき，基地局 i からの電波を時刻 n に地点 x で受信した場合の受信電力 $Q_{i,x}(n)$ は，

$$Q_{i,x}(n) = p_i\, H_{i,x}(n)\, S_{i,x}(n)\, \ell(|X_i - x|) \tag{1}$$

と表されます．

無線通信において，受信電波の品質を評価するのに用いられるのが**信号対干渉・雑音比** (SINR; signal-to-interference-plus-noise ratio) です．例えば，時刻 $n \in \mathbb{Z}$ に地点 $x \in \mathbb{R}$ で受信する電波の SINR は次式で与えられます:

$$\mathsf{SINR}_x(n) = \frac{Q_{B_x(n),x}(n)}{N_x(n) + I_x(n, B_x(n))}. \tag{2}$$

ここで，$B_x(n)$ は時刻 n に地点 x にある端末と通信している基地局 (時刻 n に地点 x をカバーしているセルの基地局) の添字を表し，$N_x(n)$ は地点 x における時刻 n での雑音です．また $I_x(n,i)$ は，地点 x にある端末が時刻 n に基地局 i と通信しているときの干渉電波の強さを表し，

$$I_x(n,i) = \sum_{j\in\mathbb{N}\setminus\{i\}} Q_{j,x}(n) \tag{3}$$

で与えられます．すなわち，通信相手の基地局以外のすべての基地局から発信される電波が干渉電波になります．

次に，(2) 式で与えられる SINR を用いて，基本的な性能評価尺度を定義しましょう．以下では，固定した

$x \in \mathbb{R}^2$ に対して $\{H_{i,x}(n), S_{i,x}(n)\}_{i\in\mathbb{N}}$ および $N_x(n)$ が時間 $n \in \mathbb{Z}$ について定常であると仮定し，時間を表す変数 n を省略します．まず，最も基本的な性能評価尺度は，地点 $x \in \mathbb{R}^2$ での**被覆確率**;

$$\mathsf{cp}_x(\theta) = \mathsf{P}(\mathsf{SINR}_x > \theta) \tag{4}$$

です．これは，与えられたしきい値 $\theta\ (>0)$ を SINR_x が越える確率です．この自然な拡張として，複数の地点での同時被覆確率や，連続した複数の時点での結合被覆確率等も考えることができます．また，平均リンク容量;

$$\tau_x = \mathsf{E}\ln(1+\mathsf{SINR}_x)$$

も重要な指標の 1 つです．これは，周波数帯域を $b\ (>0)$ としたときのシャノンの通信路容量 $b\log_2(1+\mathsf{SNR})$ において，信号対雑音比 SNR を SINR_x に置き換えて，期待値をとったものと考えれば良いでしょう (係数である $b\log_2 \mathrm{e}$ は省略)．ここで，$\ln(1+\mathsf{SINR}_x) \ge 0$ であることから，

$$\begin{aligned}\tau_x &= \int_0^\infty \mathsf{P}(\ln(1+\mathsf{SINR}_x) > u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty \mathsf{cp}_x(\mathrm{e}^u - 1)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

が成り立ち，被覆確率を数値的に求めることができれば，平均リンク容量も数値積分によって求められることが分かります．

4. 性能解析の例

それでは，前節で述べた点過程モデルに対して，最も基本的な仮定のもとで (4) 式の被覆確率を計算してみましょう．ここでは，点過程 $\Phi = \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は定常 ($\mathbb{R}^2$ 上の平行移動に関して確率分布が不変) であり，基地局からの送信電力はすべて一定 $p_i = p$, $i \in \mathbb{N}$, であるとして，原点 $o = (0,0)$ での被覆確率を考えます．また，シャドウィングは考慮せず ($S_{i,o} \equiv 1$, $i \in \mathbb{N}$)，原点におけるフェイディング $H_{i,o} = H_i$, $i \in \mathbb{N}$, は互いに独立に平均 1 の指数分布にしたがうものとします (レイリー・フェイディング)．着目する端末の位置を原点に固定していますので，地点を表す添え字も省略します．

まず，(1), (2) 式より，

$$\{\mathsf{SINR} > \theta\} = \Big\{H_B > \theta\,\frac{N + I(B)}{p\,\ell(|X_B|)}\Big\}$$

であり，H_i, $i \in \mathbb{N}$, は互いに独立に指数分布 $\mathsf{P}(H_i > x) = \mathrm{e}^{-x}$, $x \ge 0$, にしたがうことから，点過程 $\Phi = \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，原点にいる端末と通信する基地局 B, H_B 以外のフェイディング $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}\setminus\{B\}}$, そして雑音 N (要するに H_B 以外のすべての確率変数) に対して条件付けをすることによって，

$$\mathsf{cp}(\theta) = \mathsf{E}\Big(\exp\Big\{-\theta\,\frac{N + I(B)}{p\,\ell(|X_B|)}\Big\}\Big)$$

が得られます．さらに，(1), (3) 式より，

$$\exp\Big\{-\theta\,\frac{I(B)}{p\,\ell(|X_B|)}\Big\} = \prod_{j\in\mathbb{N}\setminus\{B\}} \exp\Big\{-\theta\,\frac{H_j\,\ell(|X_j|)}{\ell(|X_B|)}\Big\}$$

に注意して，今度は $\Phi = \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ と B に対して条件付けをすると，N, H_j, $j \in \mathbb{N}\setminus\{B\}$, の独立性から，

$$\begin{aligned}&\mathsf{cp}(\theta) \\ &\quad = \mathsf{E}\Big(\mathcal{L}_N\Big(\frac{\theta}{p\,\ell(|X_B|)}\Big) \prod_{j\in\mathbb{N}\setminus\{B\}} \Big(1 + \theta\,\frac{\ell(|X_j|)}{\ell(|X_B|)}\Big)^{-1}\Big)\end{aligned} \tag{5}$$

が得られます．ここで，$\mathcal{L}_N$ は N のラプラス変換であり，$\prod$ の各項では H_j (平均 1 の指数分布にしたがう) のラプラス変換 $\mathcal{L}_H(s) = (1+s)^{-1}$ を用いています．(5) 式は，すべての基地局の送信電力が同じで，かつレイリー・フェイディングを仮定したときの被覆確率の一般形であり，これに適当な点過程 $\Phi = \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を定め，さらに各端末がどの基地局と通信するのかを定める (= セルの形状を定める) 規則を仮定することによって，被覆確率を数値計算可能な形で求めることができます．

4.1 定常ポアソン点過程にしたがう基地局の配置

本節では，$\Phi = \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を強度 $\lambda\ (\in (0,\infty))$ をもつ定常ポアソン点過程とします．また，端末は最も近い基地局と通信するものとします．すなわち，$\{B = i\} = \{|X_i| \le |X_j|, j \in \mathbb{N}\}$ です．すべての基地局の送信電力が同じで，かつ伝搬損失関数 ℓ が単調減少ですから，これは平均の受信電力が最も大きくなる基地局と通信すると仮定しているのと同じです．このとき，セルは基地局の位置によって定まるボロノイ分割によって与えられます (図 2 を参照)．

さて，原点から最も近い Φ の点 X_B までの距離の確率分布は，原点を中心とする円内に Φ の点が 1 つもない確率によって与えられ，

$$\mathsf{P}(|X_B| > r) = \mathrm{e}^{-\lambda\pi r^2}, \quad r \ge 0,$$

より，$|X_B|$ の確率密度関数は，

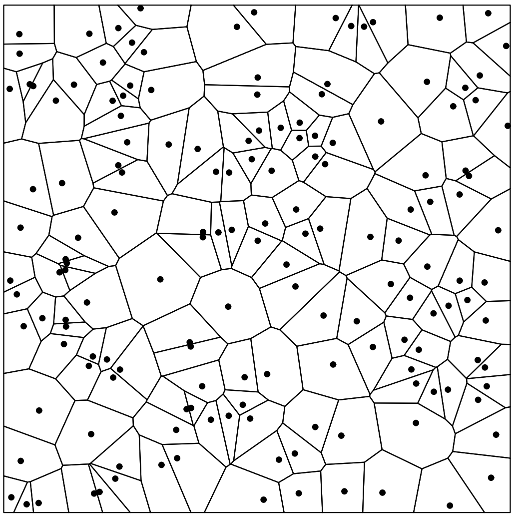

図 2　定常ポアソン点過程のサンプルとボロノイ分割

$$f_{|X_B|}(r) = 2\,\pi\,\lambda\,r\,\mathrm{e}^{-\pi\,\lambda\,r^2}, \quad r \ge 0,$$

です．これを (5) 式に適用して，

$$\begin{aligned}\mathsf{cp}(\theta) = \int_0^\infty f_{|X_B|}(r)\,\mathcal{L}_N\Bigl(\frac{\theta}{p\,\ell(r)}\Bigr) \\ \times \mathsf{E}\Bigl(\prod_{j\in\mathbb{N}}\Bigl(1+\theta\,\frac{\ell(|X_j|)}{\ell(r)}\Bigr)^{-1}\Bigm| |X_j|>r, j\in\mathbb{N}\Bigr)\,\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{6}$$

が得られます．次に，右辺の条件付き期待値を計算するために，点過程の**ラプラス汎関数**を用います．

定義 4.1 (点過程のラプラス汎関数)

$\mathbb{R}^d$ 上の点過程 $\Phi = \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ のラプラス汎関数 $\mathcal{L}_\Phi$ は，$\mathbb{R}^d$ 上の非負関数 g に対して，

$$\mathcal{L}_\Phi(g) = \mathsf{E}\Bigl(\exp\Bigl\{-\sum_{i\in\mathbb{N}} g(X_i)\Bigr\}\Bigr)$$

で定義される．

ラプラス汎関数は，(確率変数に対するラプラス変換と同様) 点過程の確率分布を完全に定め ([10] 等を参照)，強度 λ の定常ポアソン点過程の場合は，

$$\mathcal{L}_\Phi(g) = \exp\Bigl\{-\lambda\int_{\mathbb{R}^d}(1-\mathrm{e}^{-g(z)})\,\mathrm{d}z\Bigr\}$$

となります ([4] の 1.2 節，[5] の 4.6 節等を参照)．これを (6) 式右辺の条件付き期待値に適用することによって ($\prod_{j\in\mathbb{N}} a_j{}^{-1} = \exp\bigl\{-\sum_{j\in\mathbb{N}}\ln a_j\bigr\}$ に注意)，

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\Bigl(\prod_{j\in\mathbb{N}}\Bigl(1+\theta\,\frac{\ell(|X_j|)}{\ell(r)}\Bigr)^{-1}\Bigm| |X_j|>r, j\in\mathbb{N}\Bigr)\\ &= \exp\Bigl\{-\lambda\int_{|z|>r}\Bigl(1-\Bigl(1+\theta\,\frac{\ell(|z|)}{\ell(r)}\Bigr)^{-1}\Bigr)\mathrm{d}z\Bigr\}\\ &= \exp\Bigl\{-2\,\pi\,\lambda\int_r^\infty\Bigl(1-\Bigl(1+\theta\,\frac{\ell(s)}{\ell(r)}\Bigr)^{-1}\Bigr)\,s\,\mathrm{d}s\Bigr\}\end{aligned}$$

が得られます．ここで，2 つ目の等号では極座標変換をしています．最後に，$\ell(r) = c\,r^{-\beta}$, $r>0$, として，さらに適当な変数変換をすることによって，次の定理が得られます．

定理 4.1 ([11])

ここまで述べてきたセルラネットワークのモデルに対して，その被覆確率は，

$$\begin{aligned}\mathsf{cp}(\theta) = \int_0^\infty \mathcal{L}_N\Bigl(\frac{\theta}{p\,c}\Bigl(\frac{v}{\pi\,\lambda}\Bigr)^{\beta/2}\Bigr)\\ \times \exp\Bigl\{-v\,\Bigl(1+\rho(\theta,\beta)\Bigr)\Bigr\}\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

を満たす．ここで，

$$\rho(\theta,\beta) = \frac{2\,\theta^{2/\beta}}{\beta}\int_{1/\theta}^\infty \frac{u^{-1+2/\beta}}{u+1}\,\mathrm{d}u$$

である．

この定理より，雑音 N のラプラス変換 $\mathcal{L}_N$ が数値的に求められれば，被覆確率も数値積分によって求められることが分かります．また，数値計算をしなくても分かることとして，点過程の強度 λ，送信電力 p，伝搬損失係数 c は $\mathcal{L}_N$ の変数にしか現れませんので，雑音が無視できる状況では，これらのパラメータは被覆確率に影響を与えません．

ここでは，すべての基地局の送信電力が同じで，各端末がどの基地局とも通信できる場合のモデルを考えましたが，基地局ごとに送信電力が違ったり，通信できる基地局に制限のあるモデルも同様に考えることができます (例えば [12, 13, 14] 等を参照)．さらに，ポアソン過程の性質を上手く利用して，フェイディングやシャドウィングが任意の分布にしたがうように一般化することも可能です ([15, 16, 17] 等)．

4.2　その他の点過程にしたがう基地局の配置

前節では，基地局が定常ポアソン点過程にしたがって配置されたモデルを考えました．ポアソン過程は解析的な取り扱いが容易である一方，すべての基地局が互いに独立に配置されていると仮定していることにな

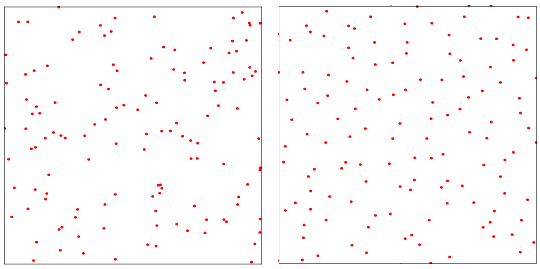

図 3　定常ポアソン点過程 (左) とジニブル点過程 (右) のサンプル

ります．しかし，2 節の最後で少し述べたように，セルラネットワークの基地局は計画性をもって配置されますので，まったく独立ということはありません．特に，基地局があまり近過ぎると電波が互いに干渉してしまうため，ある程度の距離をとって設置されている筈です．そこで，互いに反発しあう点の配置を表現できる**行列式点過程**[1]を用いて基地局の位置を表したセルラネットワークのモデルが考えられており ([21, 22] 等)，実際の基地局の配置に行列式点過程を当てはめた結果も報告されています ([23] 他)．図 3 では，定常ポアソン点過程と代表的な行列式点過程であるジニブル点過程のサンプルを比較しています．定常ポアソン点過程では各点が互いに独立に位置しているため，点が疎になっているところと密なところが現れますが，ジニブル点過程ではランダムでありながらもバランス良く点が配置されている様子が見られます．また，定常ポアソン点過程とジニブル点過程の間をパラメータ $\alpha \in (0,1]$ によって補間する α-ジニブル点過程という行列式点過程 [24] もあり，$\alpha = 1$ のとき通常のジニブル点過程に一致し，$\alpha \to 0$ とすると定常ポアソン点過程に弱収束することが知られています．こうした (α-) ジニブル点過程によって基地局の配置を表したモデルに対しても，被覆確率を数値計算可能な形で求めることができます．図 4 は，ノイズは無く ($N \equiv 0$)，伝搬損失指数 $\beta = 4$ という設定で，基地局の配置が定常ポアソン点過程にしたがう場合と α-ジニブル点過程にしたがう場合の被覆確率を表しています (横軸の単位はデシベル (dB); x [dB] $= 10^{x/10}$)．点配置のバランスが良いほど被覆確率が大きくなる様子を見ることができます (この被覆確率の単調性はまだ証明されてません!)．

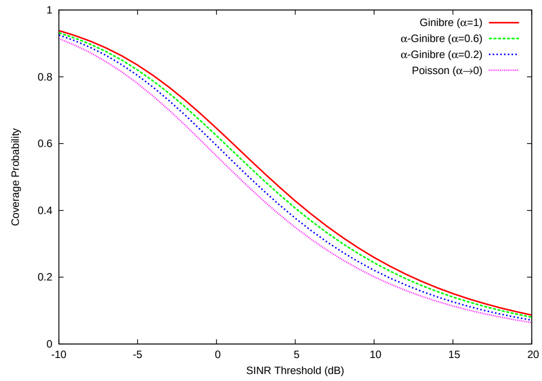

図 4　基地局の配置が定常ポアソン点過程にしたがう場合と α-ジニブル点過程にしたがう場合の被覆確率 ([22] より抜粋)

5.　おわりに

本稿では，無線通信ネットワークの点過程モデルについて，セルラネットワークの下りリンクに焦点をあてて解説しました．他のモデルとしては，まずセルラネットワークの上りリンク，すなわち端末から基地局への通信のモデルが考えられます ([25, 26] 等)．上りリンクでは，基地局の位置での受信電波を考えるため，基地局の位置を表した点過程のパルム確率[2]を考えることになります．また，基地局の近くにいる端末は小さな電力で弱い電波を発信すれば十分である一方で，セルの端のほうにいる端末は強い電波を発信するといった電力制御が実装され，端末からの送信電力が端末と基地局との相対位置に依存するため，最初に得たモデルをそのまま解析することは難しくなり，何らかの近似モデルを考える等の工夫がなされています．

その他の無線通信ネットワークとして，無線ノード同士が他の複数のノードを介してマルチホップで通信するアドホックネットワーク等が考えられます．各ノードにおいて，別のノードからの受信電波の SINR がしきい値を超えた場合にノード間に有向枝を引くことにすると，ある種の幾何ランダムグラフ (SINR グラフといいます) が構成できます．そうして，このグラフの連結性やパーコレーション等が考えられています ([28, 29, 30] 等)．

無線通信ネットワークの空間点過程モデルは，空間点過程と無線通信ネットワークという，近年それだけでも注目されている 2 つの分野が融合した，とても魅

[1] 行列式点過程の詳細については [18, 19, 20] 等をご参照ください．

[2] 1 次元の点過程に対するパルム確率については [7] を参照．空間点過程のパルム確率も同様に定義されます ([27] 等を参照)．

力的な話題だと思います．本稿を通して，この分野に興味をもっていただける方が少しでも増えれば幸いです．

謝辞　図 2 は，筆者の研究室の学生である小林拓矢君に提供してもらいました．

参考文献

[1] J. G. Andrews, R. K. Ganti, M. Haenggi, N. Jindal and S. Weber, "A primer on spatial modeling and analysis in wireless networks," *IEEE Commun. Magazine*, **48**, 156–163, 2010.

[2] H. ElSawy, E. Hossain and M. Haenggi, "Stochastic geometry for modeling, analysis, and design of multi-tier and cognitive cellular wireless networks: A survey," *IEEE Commun. Surveys Tutorials*, **15**, 996–1019, 2013.

[3] M. Haenggi, J. G. Andrews, F. Baccelli, O. Dousse and M. Franceschetti, "Stochastic geometry and random graphs for the analysis and design of wireless networks," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, **27**, 1029–1046, 2009.

[4] F. Baccelli and B. Błaszczyszyn, "Stochastic geometry and wireless networks, Volume I: Theory/Volume II: Applications," *Foundations Trends(R) Networking*, **3**, 249–449/**4**, 1–312, 2009.

[5] M. Haenggi, *Stochastic Geometry for Wireless Networks*, Cambridge Univ. Press, 2013.

[6] S. Mukherjee, *Analytical Modeling of Heterogeneous Cellular Networks: Geometry, Coverage, and Capacity*, Cambridge Univ. Press, 2014.

[7] 三好直人, "待ち行列への点過程アプローチ: 入門編," オペレーションズ・リサーチ, **59**, 212–218, 2014.

[8] D. Tse and P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*, Cambridge Univ. Press, 2005.

[9] "移動通信," 電子情報通信学会『知識の森』4 群 3 編, http://www.ieice-hbkb.org/portal/doc_549.html.

[10] D. J. Daley and D. Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes, Volume I: Elementary Theory and Methods*, 2nd Ed., Springer, 2003.

[11] J. G. Andrews, F. Baccelli and R. K. Ganti, "A tractable approach to coverage and rate in cellular networks," *IEEE Trans. Commun.*, **59**, 3122–3134, 2011.

[12] H. S. Dhillon, R. K. Ganti, F. Baccelli and J. G. Andrews, "Modeling and analysis of K-tier downlink heterogeneous cellular networks," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, **30**, 550–560, 2012.

[13] H.-S. Jo, Y. J. Sang, P. Xia and J. G. Andrews, "Heterogeneous cellular networks with flexible cell association: A comprehensive downlink SINR analysis," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, **11**, 3484–3495, 2012.

[14] S. Mukherjee, "Distribution of downlink SINR in heterogeneous cellular networks," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, **30**, 575–585, 2012.

[15] H. P. Keeler, B. Błaszczyszyn and M. K. Karray, "SINR-based k-coverage probability in cellular networks with arbitrary shadowing," *Proc. IEEE ISIT 2013*, 1167–1171, 2013.

[16] P. Madhusudhanan, J. G. Restrepo, Y. Liu and T. X. Brown, "Downlink coverage analysis in a heterogeneous cellular network," *Proc. IEEE Globecom 2012*, 4170–4175, 2012.

[17] P. Madhusudhanan, J. G. Restrepo, Y. Liu and T. X. Brown, "Downlink analysis for a heterogeneous cellular network," *Proc. WiOpt 2014*, 723–730, 2014.

[18] J. B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres and B. Virág, *Zeros of Gaussian Analytic Functions and Determinantal Point Processes*, American Math. Soc., 2009.

[19] T. Shirai and Y. Takahashi, "Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: Fermion, Poisson and Boson processes," *J. Funct. Anal.*, **205**, 414–463, 2003.

[20] A. Soshnikov, "Determinantal random point fields," *Russian Math. Surveys*, **55**, 923–975, 2000.

[21] N. Miyoshi and T. Shirai, "A cellular network model with Ginibre configurated base stations," *Adv. Appl. Probab.*, **46**, 832–845, 2014.

[22] I. Nakata and N. Miyoshi, "Spatial stochastic models for analysis of heterogeneous cellular networks with repulsively deployed base stations," *Perform. Eval.*, **78**, 7–17, 2014.

[23] Y. Li, F. Baccelli, H. S. Dhillon and J. G. Andrews, "Fitting determinantal point processes to macro base station deployments," to appear in *Proc. IEEE Globecom*, 2014.

[24] A. Goldman, "The Palm measure and the Voronoi tessellation for the Ginibre process," *Ann. Appl. Probab.*, **20**, 90–128, 2010.

[25] T. Kobayashi and N. Miyoshi, "Uplink cellular network models with Ginibre deployed base stations," to appear in *Proc. ITC 26*, 2014.

[26] T. D. Novlan, H. S. Dhillon and J. G. Andrews, "Analytical modeling of uplink cellular networks," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, **12**, 2669–2679, 2013.

[27] D. J. Daley and D. Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes, Volume II: General Theory and Structure*, 2nd Ed., Springer, 2008.

[28] F. Baccelli, B. Błaszczyszyn and M.-O. Haji-Mirsadeghi, "Optimal paths on the space-time SINR random graph," *Adv. Appl. Probab.*, **43**, 131–150, 2011.

[29] O. Dousse, M. Franceschetti, N. Macris, R. Meester and P. Thiran, "Percolation in the signal to interference ratio graph," *J. Appl. Probab.*, **43**, 552–562, 2006.

[30] R. Vaze: "Percolation and connectivity on the signal to interference ratio graph," *Proc. IEEE INFOCOM 2012*, 513–521, 2012.