非古典論理のシーケント計算
— 完全性定理のシーケント計算による証明 —

鹿島 亮 (東京工業大学 情報理工学研究科 数理 · 計算科学専攻)

非古典論理の研究において, それが特定の論理の性質を調べるものであっても, 論理のあるクラスに関する性質を研究するものであっても,「それらの論理体系の, 適切なモデルに対する完全性定理」が研究の出発点になっていると言っていいだろう. 完全性定理は「公理系」と「モデル」との自明でない関係を明らかにするものであり, 適切に選ばれたある公理達があるリーズナブルなセマンティックスに対して完全であるという事実は, その論理を研究する面白味や価値の保証となる.

本稿では, そのような完全性定理をシーケント計算 (sequent calculus) を用いて証明する方法について, いくつかの論理を例にして説明する. そこで重要なテクニックとして用いられるのは「構造化されたシーケント」を扱うことである. このアイデアはすでに多くの研究者がそれぞれの背景や必要に応じて様々な形で用いてきたものであるが (たとえば文献 [3] やそこの参考文献を見よ), 本稿では特に「シーケント計算はタブロー法と同等である」という観点から, モデルの形をそのまま表したシーケント体系を説明する. なお, 近年 Labelled Deductive Systems (LDS) と呼ばれる体系の研究がおこなわれているが ([9]), これは「ラベル付き」の論理式を扱う公理系の一般論であり, 本稿で説明するシーケント体系は「構造」を「ラベル」で表現すれば LDS の一例になる (と筆者は理解している).

本稿では, いくつかの論理の完全性の簡潔な別証明や, ある論理については従来知られている完全性定理を強めた結果を証明する. そしてこれらの事実は, このシーケント計算を用いた方法が本質を捉えた有望なものであることを示している. はじめに述べたように完全性は「出発点」であり, これを用いて非古典論理の研究がさらに深まることが筆者の望みである.

1 古典論理

はじめにすべての基本となる古典論理の完全性証明を見ておく. この方法は, [16] では「Schütte の方法」と呼ばれ, [4] では「Beth[1956], Hintikka[1955], Kanger[1957], Schütte[1965] らが独立におこなった semantic tableau (本稿では『タブロー法』と呼ぶ) の完全性に基づく」と言われているものである. ここに言われているようにシーケント計算はタブロー法と実質的に同じものであり「限りなくモデルに近い証明系」であるので, これが完全性定理 — 証明系とモ

デルとの関係 — を示すのに適しているのは当然である.

一階述語論理の可算言語をひとつ固定し, A, B 等で論理式を表し, Γ, Δ 等で特に断らない限り論理式の集合を表す. 通常通り Γ, A は $\Gamma \cup \{A\}$ を意味する. シーケントとは $\Gamma \Rightarrow \Delta$ という形の式である. ただしシーケントにおいては Γ, Δ は有限集合とする.

[**体系 LK**]
公理: $A \Rightarrow A$
推論規則:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{weakening 左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (\text{weakening 右})$$

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge\text{左}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}\ (\wedge\text{右})$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\vee\text{左}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\ (\vee\text{右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\to\text{左}) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\ (\to\text{右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\neg\text{左}) \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ (\neg\text{右})$$

$$\frac{A(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\forall\text{左}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A(x)}\ (\forall\text{右})$$

$$\frac{A(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\exists\text{左}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A(x)}\ (\exists\text{右})$$

ただし (∀左), (∀右), (∃左), (∃右) において t は任意の項, a は下式に現れない自由変数である.

この **LK** は cut を持たない. さらに, contraction と exchange はシーケントの両辺が集合であることから不要になっている.

LK で証明できないシーケント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が以下のすべての条件を満たすとき, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ は LK-飽和であると言う. (A, B を任意の論理式, x を任意の束縛変数とする.)

(∧左飽和) $A \wedge B \in \Gamma$ ならば ($A \in \Gamma$ かつ $B \in \Gamma$).
(∧右飽和) $A \wedge B \in \Delta$ ならば ($A \in \Delta$ または $B \in \Delta$).
(∨左飽和) $A \vee B \in \Gamma$ ならば ($A \in \Gamma$ または $B \in \Gamma$).
(∨右飽和) $A \vee B \in \Delta$ ならば ($A \in \Delta$ かつ $B \in \Delta$).

(→左飽和) $A \to B \in \Gamma$ ならば ($A \in \Delta$ または $B \in \Gamma$).
(→右飽和) $A \to B \in \Delta$ ならば ($A \in \Gamma$ かつ $B \in \Delta$).
(¬左飽和) $\neg A \in \Gamma$ ならば $A \in \Delta$.
(¬右飽和) $\neg A \in \Delta$ ならば $A \in \Gamma$.
(∀左飽和) $\forall x A(x) \in \Gamma$ ならば ($A(t) \in \Gamma$ for any term t).
(∀右飽和) $\forall x A(x) \in \Delta$ ならば ($A(t) \in \Delta$ for some term t).
(∃左飽和) $\exists x A(x) \in \Gamma$ ならば ($A(t) \in \Gamma$ for some term t).
(∃右飽和) $\exists x A(x) \in \Delta$ ならば ($A(t) \in \Delta$ for any term t).

[**LK の完全性定理**]
LK $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば, Γ の要素をすべて真にし Δ の要素をすべて偽にする構造 (古典論理のモデル) がある.
[**証明**]
一般に, Π, Σ が可算無限または有限集合のときに $\Pi \Rightarrow \Sigma$ を無限シーケントと呼ぶ. 無限シーケントが証明できるということは, そのある有限部分が証明できることとして定義する. さて, **LK** で証明できない $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に対して, これを拡大して, LK-飽和な無限シーケント $\Gamma^+ \Rightarrow \Delta^+$ を得ることができる. すると, 言語の項全体を対象領域とし, 変数記号や関数記号の解釈を項上のそのままの意味とし, Γ^+ に入っている原子論理式を真に, 入っていない原子論理式を偽とする構造を考えると, そこでは Γ^+ 中のすべての論理式が真になり Δ^+ 中のすべての論理式が偽になる. ∎

論理式をベースにした (「Hilbert 流」の) 古典論理の体系 (これを **cl** とする) の完全性のためには, 次を示せばよい: **LK** $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば **cl** $\vdash \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$.

この完全性証明は, 極大無矛盾集合, Henkin 定数を用いる証明と比べて (本質的には同じことなのだが) 次のような利点がある.

- カット無しのシーケント計算の完全性を示すことができ, カット除去定理のセマンティカルな証明を与える.
- シーケントを拡大する手続きがシンプルでわかりやすい. 特に, Hnekin 定数を使う証明では「この定数は証明図中の他の個所に現れないので変数と思ってよい」という議論をするのだが, 上の完全性証明では初めから変数を用いるので無駄がない.

2 直観主義論理

次に直観主義述語論理を例にして, 本稿の主眼である「構造化されたシーケント」を用いた完全性証明を紹介する. なお, ここでは簡単のために言語には定数

記号と関数記号が無いものとする.

直観主義述語論理の Kripke モデルとは以下の性質を持つ組 $\langle W, \leq, D, \mathcal{V}\rangle$ である.

- $\langle W, \leq\rangle$ は順序集合 (可能世界の集合).
- D は W の各要素に非空集合を割り当てる関数で,

  $$k \leq l \implies D(k) \subseteq D(l)$$

  を満たすもの ($D(k)$ は可能世界 k における対象領域).
- $\mathcal{V}$ は W の各要素 k に At_k の部分集合を割り当てる関数で,

  $$k \leq l \implies \mathcal{V}(k) \subseteq \mathcal{V}(l)$$

  を満たすもの. ただし At_k は $D(k)$ のすべての要素を定数記号として付け加えた言語の原子文全体である. そして, $\mathcal{V}(k)$ は以下の定義によって論理式の部分集合へ拡張される.

  $A \wedge B \in \mathcal{V}(k) \iff A \in \mathcal{V}(k)$ かつ $B \in \mathcal{V}(k)$.
  $A \vee B \in \mathcal{V}(k) \iff A \in \mathcal{V}(k)$ または $B \in \mathcal{V}(k)$.
  $A \to B \in \mathcal{V}(k) \iff [A \in \mathcal{V}(l)$ ならば $B \in \mathcal{V}(l)]$ for any $l \geq k$.
  $\neg A \in \mathcal{V}(k) \iff A \notin \mathcal{V}(l)$ for any $l \geq k$.
  $\forall x A(x) \in \mathcal{V}(k) \iff A(c) \in \mathcal{V}(l)$ for any $l \geq k$, any $c \in D(l)$.
  $\exists x A(x) \in \mathcal{V}(k) \iff A(c) \in \mathcal{V}(k)$ for some $c \in D(k)$.

モデル $M = \langle W, \leq, D, \mathcal{V}\rangle$ において $A \in \mathcal{V}(k)$ であることを $M, k \models A$ と書く (M の可能世界 k において, A は真である). W のすべての要素 k について $M, k \models A$ であることを $M \models A$ と書く.

論理式をベースにした直観主義論理の体系を **int** とする.

[**int の完全性と健全性**]
$\mathbf{int} \vdash A \iff$ どんな Kripke モデル M に対しても $M \models A$.

この完全性は通常次のように証明される.

$\mathbf{int} \nvdash A$ であるときに $M \not\models A$ なるモデル M の存在を示すのだが, たとえば [16] では, いわば「LJ′-飽和」—LK-飽和の条件から (→右飽和),(¬右飽和),(∀右飽和) を削除したもの—であるシーケントを各可能世界とするモデルを作る. その際, LJ′-飽和までの拡大手続きは各シーケントごとに独立におこなう. すなわ

ち, まず A を真にしない可能世界をつくるためにシーケント $\Rightarrow A$ を拡大してひとつの LJ′-飽和シーケントを作り, その右辺に現れる $B{\to}C$, $\neg D$, $\forall x E(x)$ という形の論理式を真にしないために, 適切なシーケントを種に拡大してそれぞれ別の LJ′-飽和シーケントを作り, このプロセスを無限に繰り返していく.

このモデルの作り方は「Kripke モデルは古典論理のモデルが複数つながったようなものである」という観点からすれば古典論理の完全性証明の自然な拡張であるのだが, 一方「一回の拡大作業で一つのモデルを作る」というタブロー法の精神を受け継ぐならば, 次のような完全性証明が与えられる.

シーケントの有限木を T シーケントと呼ぶ. ただし, 各ノードにおいて「それより深いノードで許される自由変数」を明記する必要があるので, 以下の定義をする.

- Γ, Δ が論理式の有限集合で α が自由変数の有限集合のとき,

  $$[\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta]$$

  は準 T シーケントである (根 $\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta$ だけから成る木). α を「新規許容変数集合」と呼ぶ.

- Γ, Δ が論理式の有限集合で, α が自由変数の有限集合で, $\mathcal{T}_1, ..., \mathcal{T}_k$ がそれぞれ準 T シーケントで, α が $\mathcal{T}_1, ..., \mathcal{T}_k$ 中のどんな新規許容変数集合とも交わりを持たないとき,

  $$[\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta \mid \mathcal{T}_1 ... \mathcal{T}_k]$$

  は準 T シーケントである (根 $\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta$ から部分木 $\mathcal{T}_1, ..., \mathcal{T}_k$ が生えている木).

$\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta$ が準 T シーケント $\mathcal{T}$ のノードであるとき, $\mathcal{T}$ の根からこのノードへ至るパス上のすべての新規許容変数集合の和集合を, このノードの「許容変数集合」と言う. 準 T シーケント $\mathcal{T}$ が次の条件を満たすとき, これを T シーケントと呼ぶ: $\mathcal{T}$ の任意のノード $\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta$ について, Γ, Δ 中のすべての自由変数がこのノードの許容変数集合に含まれる.

[**体系 TLJ**] — T シーケントを導く

公理: $\cdots [A \overset{\alpha}{\Rightarrow} A \mid \cdots$
(つまり, **LK** の公理をあるノードとして持つ T シーケント)

推論規則:
(1)

(→右), (¬右), (∀右) 以外の規則については **LK** の各規則をあるノードに適用した形. たとえば (→左) は次のようになる.

$$\frac{\cdots[\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta, A \mid \cdots \quad \cdots[B, \Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta \mid \cdots}{\cdots[A{\to}B, \Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta \mid \cdots}\ (\to\text{左})$$

また (∃左) においては新規許容変数に関して以下の操作をする.

$$\frac{\cdots[A(a), \Gamma \overset{\alpha\cup\{a\}}{\Rightarrow} \Delta \mid \cdots}{\cdots[\exists x A(x), \Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta \mid \cdots}\ (\exists\text{左})$$

ただし a は結論に現れない自由変数である.

(2)
(→右), (¬右), (∀右) については「葉を刈り取る」次の形になる.

$$\frac{\cdots[\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta \mid \mathcal{T}_1 ... \mathcal{T}_k\ [A \overset{\emptyset}{\Rightarrow} B]\ \mathcal{T}'_1 ... \mathcal{T}'_l] \cdots}{\cdots[\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta, A{\to}B \mid \mathcal{T}_1 ... \mathcal{T}_k \mathcal{T}'_1 ... \mathcal{T}'_l] \cdots}\ (\to\text{右})$$

$$\frac{\cdots[\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta \mid \mathcal{T}_1 ... \mathcal{T}_k\ [\overset{\{a\}}{\Rightarrow} A(a)]\ \mathcal{T}'_1 ... \mathcal{T}'_l] \cdots}{\cdots[\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta, \forall x A(x) \mid \mathcal{T}_1 ... \mathcal{T}_k \mathcal{T}'_1 ... \mathcal{T}'_l] \cdots}\ (\forall\text{右})$$

ただし a は結論に現れない自由変数である. (¬右) は (→右) と同様になる.

(3) ノードの左辺の式は自由に根の方向へ移動してよい.

$$\frac{\cdots[\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta \mid \mathcal{T}_1 ... \mathcal{T}_k\ [A, \Pi \overset{\beta}{\Rightarrow} \Sigma \cdots]\ \mathcal{T}'_1 ... \mathcal{T}'_l] \cdots}{\cdots[A, \Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta \mid \mathcal{T}_1 ... \mathcal{T}_k\ [\Pi \overset{\beta}{\Rightarrow} \Sigma \cdots]\ \mathcal{T}'_1 ... \mathcal{T}'_l] \cdots}\ (\text{移動})$$

TLJ で証明できない T シーケント $\mathcal{T}$ が TLJ 飽和であるとは, 以下を満たすことである.

- $\mathcal{T}$ の各ノードは LJ′-飽和である. (ただし「for any term t」などは「そこでのすべての許容変数に対して」などと読み替える.)
- $\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta$ がノードで $A{\to}B \in \Delta$ ならば, $\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta$ の子孫 $\Pi \overset{\beta}{\Rightarrow} \Sigma$ が存在して $A \in \Pi$ かつ $B \in \Sigma$.

- $\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta$ がノードで $\neg A \in \Delta$ ならば, $\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta$ の子孫 $\Pi \overset{\beta}{\Rightarrow} \Sigma$ が存在して $A \in \Pi$.
- $\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta$ がノードで $\forall A(x) \in \Delta$ ならば, $\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta$ の子孫 $\Pi \overset{\beta}{\Rightarrow} \Sigma$ と自由変数 a が存在して $A(a) \in \Sigma$.
- $\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta$ が $\Pi \overset{\beta}{\Rightarrow} \Sigma$ の先祖ならば $\Gamma \subseteq \Pi$.

[**TLJ の完全性定理**]
T シーケント $\mathcal{T}$ が **TLJ** で証明できないならば, ある Kriple モデル $M = \langle W, \leq, D, \mathcal{V} \rangle$ に対して次が成り立つ.

- $\mathcal{T}$ の木構造を $\langle W, \leq \rangle$ に埋め込むことができる.
- $\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta$ が $\mathcal{T}$ のノードで, $k \in W$ を上の埋め込みで対応する元としたとき, $M, k \models \bigwedge \Gamma$ かつ $M, k \not\models \bigvee \Delta$.

[**証明**]
$\mathcal{T}$ を拡大して, TLJ-飽和な無限 T シーケントを作り, それをそのままモデルにすればよい (各ノードを各可能世界とし, そこでの許容変数集合を対象領域とする). ∎

T シーケント $\mathcal{T} = [\Gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} \Delta \mid \mathcal{T}_1 ... \mathcal{T}_k]$ に対して, これを論理式に翻訳した $\mathcal{T}^*$ を再帰的に定義する: Γ, Δ 中に現れる自由変数のうち α の要素になっているもののすべての出現を指定してこれを $\Gamma(\overrightarrow{a}), \Delta(\overrightarrow{a})$ と書くとき,

$$\mathcal{T}^* = \forall \overrightarrow{x} (\bigwedge \Gamma(\overrightarrow{x}) \rightarrow \bigvee \{\Delta(\overrightarrow{x}), \mathcal{T}_1^*, ..., \mathcal{T}_k^*\}).$$

論理式をベースにした直観主義論理の体系の完全性は, 次から示される: **TLJ** $\vdash \mathcal{T}$ ならば **int** $\vdash \mathcal{T}^*$. (なぜなら, 特に $[\Rightarrow A]^* = A$.)

3 中間論理

T シーケントを使う完全性証明は, いくつかの中間述語論理に対して真価が発揮される.

[**中間述語論理 LC**]

直観主義述語論理に公理 $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ を加えた中間述語論理を **LC** と呼ぶ. Kripke モデル $M = \langle W, \leq, D, \mathcal{V} \rangle$ の $\langle W, \leq \rangle$ が線形順序のとき, これを線形

Kripke モデルと呼ぶ. 長年の未解決問題「**LC** は線形 Kripke モデルに対して完全か?」は [7] で肯定的に証明されたが, ここでは T シーケントを使った簡潔な証明を与える. ([7] にはシーケント体系は登場しないが, 本質的な部分はここでの方法と同じである.)

ここでは線形の T シーケントを扱う. そのため T シーケントの記述において角括弧 [ ] は冗長なので書かない.

[**体系 TLC**]
TLJ で, 扱う T シーケントを線形 T シーケントに限り, さらに (→右),(¬右),(∀右) を以下のようにする.

(→右) は次の形.

$$\frac{\mathcal{T}_0 \qquad \mathcal{T}_1 \qquad \cdots \qquad \mathcal{T}_k}{\cdots \mid \Gamma_0 \overset{\alpha_0}{\Rightarrow} \Delta_0, A{\to}B \mid \Gamma_1 \overset{\alpha_1}{\Rightarrow} \Delta_1 \mid \cdots \mid \Gamma_k \overset{\alpha_k}{\Rightarrow} \Delta_k}\ (\to\text{右})$$

ただし $k \geq 0$ で

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0 &= \cdots \mid \Gamma_0 \overset{\alpha_0}{\Rightarrow} \Delta_0 \mid A \overset{\emptyset}{\Rightarrow} B \mid \Gamma_1 \overset{\alpha_1}{\Rightarrow} \Delta_1 \mid \cdots \mid \Gamma_k \overset{\alpha_k}{\Rightarrow} \Delta_k \\
\mathcal{T}_1 &= \cdots \mid \Gamma_0 \overset{\alpha_0}{\Rightarrow} \Delta_0 \mid \Gamma_1 \overset{\alpha_1}{\Rightarrow} \Delta_1 \mid A \overset{\emptyset}{\Rightarrow} B \mid \cdots \mid \Gamma_k \overset{\alpha_k}{\Rightarrow} \Delta_k \\
&\ \vdots \\
\mathcal{T}_k &= \cdots \mid \Gamma_0 \overset{\alpha_0}{\Rightarrow} \Delta_0 \mid \Gamma_1 \overset{\alpha_1}{\Rightarrow} \Delta_1 \mid \cdots \mid \Gamma_k \overset{\alpha_k}{\Rightarrow} \Delta_k \mid A \overset{\emptyset}{\Rightarrow} B.
\end{aligned}$$

(∀右) は次の形.

$$\frac{\mathcal{T}_0 \qquad \mathcal{T}_1 \qquad \cdots \qquad \mathcal{T}_k}{\cdots \mid \Gamma_0 \overset{\alpha_0}{\Rightarrow} \Delta_0, \forall x A(x) \mid \Gamma_1 \overset{\alpha_1}{\Rightarrow} \Delta_1 \mid \cdots \mid \Gamma_k \overset{\alpha_k}{\Rightarrow} \Delta_k}\ (\forall\text{右})$$

ただし $k \geq 0$ で

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0 &= \cdots \mid \Gamma_0 \overset{\alpha_0}{\Rightarrow} \Delta_0 \mid \overset{\{a\}}{\Rightarrow} A(a) \mid \Gamma_1 \overset{\alpha_1}{\Rightarrow} \Delta_1 \mid \cdots \mid \Gamma_k \overset{\alpha_k}{\Rightarrow} \Delta_k \\
\mathcal{T}_1 &= \cdots \mid \Gamma_0 \overset{\alpha_0}{\Rightarrow} \Delta_0 \mid \Gamma_1 \overset{\alpha_1}{\Rightarrow} \Delta_1 \mid \overset{\{a\}}{\Rightarrow} A(a) \mid \cdots \mid \Gamma_k \overset{\alpha_k}{\Rightarrow} \Delta_k \\
&\ \vdots \\
\mathcal{T}_k &= \cdots \mid \Gamma_0 \overset{\alpha_0}{\Rightarrow} \Delta_0 \mid \Gamma_1 \overset{\alpha_1}{\Rightarrow} \Delta_1 \mid \cdots \mid \Gamma_k \overset{\alpha_k}{\Rightarrow} \Delta_k \mid \overset{\{a\}}{\Rightarrow} A(a)
\end{aligned}$$

で, a は結論に現れない自由変数.

(¬右) は (→右) と同様.

TLC の線形 Kripke モデルに対する完全性は, **TLJ** の Kripke モデルに対する完全性と全く同様に証明される. さらに論理式をベースにした **LC** の完全性も, **TLJ** の場合と同様に

$$\mathbf{TLC} \vdash \mathcal{T} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{LC} \vdash \mathcal{T}^*$$

から示される. ここで **TLC** に特有の規則, たとえば

(1) $\Gamma \Rightarrow \Delta \mid \overset{\{a\}}{\Rightarrow} A(a) \mid \Lambda \overset{\lambda}{\Rightarrow} \Theta \mid \Pi \overset{\pi}{\Rightarrow} \Sigma$
(2) $\Gamma \Rightarrow \Delta \mid \Lambda \overset{\lambda}{\Rightarrow} \Theta \mid \overset{\{a\}}{\Rightarrow} A(a) \mid \Pi \overset{\pi}{\Rightarrow} \Sigma$
(3) $\Gamma \Rightarrow \Delta \mid \Lambda \overset{\lambda}{\Rightarrow} \Theta \mid \Pi \overset{\pi}{\Rightarrow} \Sigma \mid \overset{\{a\}}{\Rightarrow} A(a)$

から

$$\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A(x) \mid \Lambda \overset{\lambda}{\Rightarrow} \Theta \mid \Pi \overset{\pi}{\Rightarrow} \Sigma$$

を導く (∀右) については,

(2') $\Gamma \to \Delta \vee \forall \overrightarrow{y}(\Lambda \to \Theta \vee \forall x(A(x) \vee \forall \overrightarrow{z}(\Pi \to \Sigma)))$
(3') $\Gamma \to \Delta \vee \forall \overrightarrow{y}(\Lambda \to \Theta \vee \forall \overrightarrow{z}(\Pi \to \Sigma \vee \forall x A(x)))$
[**LC** の公理] $(\forall x A(x) \to \forall \overrightarrow{z}(\Pi \to \Sigma)) \vee (\forall \overrightarrow{z}(\Pi \to \Sigma) \to \forall x A(x))$

($\bigwedge, \bigvee$ は煩雑なので省略) から

(4) $\Gamma \to \Delta \vee \forall \overrightarrow{y}(\Lambda \to \Theta \vee \forall \overrightarrow{z}(\Pi \to \Sigma) \vee \forall x A(x))$

を得て, さらに (4) と

(1') $\Gamma \to \Delta \vee \forall x(A(x) \vee \forall \overrightarrow{y}(\Lambda \to \Theta \vee \forall \overrightarrow{z}(\Pi \to \Sigma)))$
[**LC** の公理] $(\forall x A(x) \to X) \vee (X \to \forall x A(x))$
ただし $X = \forall \overrightarrow{y}(\Lambda \to \Theta \vee \forall \overrightarrow{z}(\Pi \to \Sigma))$

により

$$\Gamma \to \Delta \vee \forall x A(x) \vee \forall \overrightarrow{y}(\Lambda \to \Theta \vee \forall \overrightarrow{z}(\Pi \to \Sigma))$$

が得られることで示される.

LC の完全性証明は「飽和シーケントをばらばらに作ってからそこに順序を入れる」という方法では, 適切な—対象領域が単調に増えていく—線形順序にするのが困難でうまくいかない. **TLC** を使うと, 必要なノード, 必要な変数だけを使ってうまく線形順序を組み立てていくことができる.

[**中間述語論理 CD**]

直観主義述語論理に公理 $\forall x(A(x)\vee B)\rightarrow\forall xA(x)\vee B$ (ただし x は B に現れない) を加えた中間述語論理を **CD** と呼ぶ. Kripke モデル $\langle W, \leq, D, \mathcal{V}\rangle$ が

$$D(k) = D(l) \text{ for any } k, l \in W$$

を満たすとき, これは定領域モデルと呼ばれる. **CD** が定領域 Kripke モデルに対して完全であることは [11] 等で示されているが, ここでは T シーケントを使った簡潔な証明を紹介する. なお, この方法は [15] でやられている.

以下では「ノード毎の変数の制御」が必要ないので, T シーケントに「新規許容変数」の表示をしないことにする. (すべての変数がすべてのノードで「許容変数」であると見なす.)

[**体系 TLD**]
TLJ の (∀右) を

$$\frac{\cdots[\Gamma \Rightarrow \Delta, A(a) \mid \cdots}{\cdots[\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall xA(x) \mid \cdots}\ (\forall右)$$

(ただし a は結論に現れない自由変数) にしたもの. (∃左) の変数条件もこれと同じにする.

TLD の定領域 Kripke モデルに対する完全性は, **TLJ** の場合と同様に示される. ((∀右) に関しては新たなノードを作るのではなく (∃左) と同様に扱う.) さらに, 論理式をベースにした **CD** の完全性は

$$\mathbf{TLD} \vdash \mathcal{T} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{CD} \vdash \mathcal{T}^{\#}$$

から示される. ただし $\mathcal{T}^{\#}$ は $\mathcal{T}^{*}$ の $\forall\overrightarrow{x}$ をすべて一番外側にもってきたものである. ここで **TLD** に特有の規則, たとえば

$$\frac{[\Gamma \Rightarrow \Delta \mid [\Lambda \Rightarrow \Theta, A(a)]]}{[\Gamma \Rightarrow \Delta \mid [\Lambda \Rightarrow \Theta, \forall xA(x)]]}\ (\forall右)$$

については

$$\frac{\forall\overrightarrow{y}\forall x[\Gamma \rightarrow \Delta \vee (\Lambda \rightarrow \Theta \vee A(x))]}{\forall\overrightarrow{y}[\Gamma \rightarrow \Delta \vee (\Lambda \rightarrow \Theta \vee \forall xA(x))]}$$

という推論が **CD** でできることを用いればよい.

CD の完全性証明は「飽和シーケントをばらばらに作る」という方法では, あるノードでの拡大作業によって新たに生じた自由変数を, そのノードより先祖にフィードバックさせることが困難なのでうまくいかない. **TLD** を使うとすべてのノードを同時に拡大していくので, この困難が解消される.

CD に対する (cut-free な) シーケント計算の体系は他にも知られている. たとえば [13] の "CLD" は T シーケントの木構造を「紐 (connection)」で表現したものと思ってもよい.

4 適切含意論理

ここでは論理記号 $\to$ だけから成る体系を考える. 適切含意論理 (relevant logic) **R** と **E** の含意断片の自然なモデル ("semilattice semantics") に対する完全性は [17], [2] などで示されている. この節では, はじめに **R** の完全性証明を紹介して, 次いで **E** について, 従来知られているよりも強い完全性 (モデルを線形モデルに制限する) を, 構造化されたシーケントを用いて証明する.

[**適切含意論理 R**]

$\to$ だけから成る **R** は, 次で公理化される.

(公理 B): $(B{\to}C){\to}((A{\to}B){\to}(A{\to}C))$
(公理 C): $(A{\to}(B{\to}C)){\to}(B{\to}(A{\to}C))$
(公理 I): $A{\to}A$
(公理 W): $(A{\to}(A{\to}B)){\to}(A{\to}B)$
$\dfrac{A \quad A{\to}B}{B}$ (規則 mp)

(これに (公理 K): $A{\to}(B{\to}A)$ を加えると直観主義論理になる.)

R モデルとは以下の条件を満たす 組 $M = \langle I, \cdot, \mathbf{e}, \mathcal{V}\rangle$ である.

- $\langle I, \cdot, \mathbf{e}\rangle$ は単位元を持つ半束 (べき等可換モノイド). すなわち, $(x{\cdot}y){\cdot}z = x{\cdot}(y{\cdot}z)$, $x{\cdot}\mathbf{e} = x$, $x{\cdot}y = y{\cdot}x$, $x{\cdot}x = x$ を満たす. (I は「情報の集合」, $\cdot$ は「情報の足し算」, $\mathbf{e}$ は「空情報」と見なせばよい.)

- $\mathcal{V}$ は各 $\alpha \in I$ に原子論理式の集合を割り当てる関数. そして以下の定義によって $\mathcal{V}(\alpha)$ は論理式の集合へ拡張される.

  $A{\to}B \in \mathcal{V}(\beta) \iff \forall\alpha \in I\ [A \in \mathcal{V}(\alpha)$ ならば $B \in \mathcal{V}(\alpha{\cdot}\beta)]$

$A \in \mathcal{V}(\alpha)$ であることを $M, \alpha \models A$ と書く (M で情報 α を過不足なく使って A が結論される). $M, \mathbf{e} \models A$ であることを $M \models A$ と書く.

[**R の完全性と健全性**]
$\mathbf{R} \vdash A \quad \Longleftrightarrow \quad$ どんな R モデル M に対しても $M \models A$.

この完全性をシーケント計算によって証明する. なお, この方法は [10] でやられている.

自然数の有限集合のことを「ラベル」と呼ぶ. 以下では $a, b, \ldots$ は自然数を表し, $\alpha, \beta, \ldots$ はラベルを表す. α がラベル, A が論理式のとき, $\alpha\!:\!A$ という形の式を「L 式」と呼ぶ. Γ, Δ が L 式の有限集合のとき, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ という式を「L シーケント」と呼ぶ.

[**体系 LR**] (L シーケントを扱う)
公理: $\quad \alpha\!:\!A \Rightarrow \alpha\!:\!A$
推論規則:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha\!:\!A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{weakening 左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha\!:\!A}\ (\text{weakening 右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha\!:\!A \quad \alpha\cup\beta\!:\!B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\beta\!:\!A\to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\to\text{左}) \qquad \frac{\Gamma, \{a\}\!:\!A \Rightarrow \{a\}\cup\beta\!:\!B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \beta\!:\!A\to B, \Delta}\ (\to\text{右})$$

ただし ($\to$右) において, a は β にも Γ, Δ 中のラベルの中にも含まれない自然数である.

ラベル全体の集合を $\mathcal{L}$ とし, $M = \langle \mathcal{L}, \cup, \emptyset, \mathcal{V} \rangle$ という形の R モデルを「R ラベルモデル」と言う. ラベル式 $\alpha\!:\!A$ がこのモデルで真である, 偽であるということを, それぞれ $M, \alpha \models A$, $M, \alpha \not\models A$ ということと定義する.

LR で証明できない $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が以下の条件を満たすとき, この L シーケントは LR-飽和であるという: β を任意のラベル, A, B を任意の論理式としたとき,

$\beta\!:\!A\to B \in \Gamma$ ならば $\forall\alpha\ [\alpha\!:\!A \in \Delta$ または $\alpha\cup\beta\!:\!B \in \Gamma]$,

$\beta\!:\!A\to B \in \Delta$ ならば $\exists\alpha\ [\alpha\!:\!A \in \Gamma$ かつ $\alpha\cup\beta\!:\!B \in \Delta]$.

[**LR の完全性定理**]
LR $\not\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば, ある R ラベルモデル M において Γ の要素はすべて真になり Δ の要素はすべて偽になる.
[**証明**]
$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が **LR** で証明できないときには, これを拡大して, LR-飽和な無限 L シー

ケント $\Gamma^+ \Rightarrow \Delta^+$ を得ることができる. そこで R ラベルモデル $M = \langle \mathcal{L}, \cup, \emptyset, \mathcal{V} \rangle$ を $\mathcal{V}(\alpha) = \{p \mid \alpha{:}p \in \Gamma^+\}$ で定義すれば, ここで Γ^+ の要素はすべて真になり Δ^+ の要素はすべて偽になる. ∎

論理式ベースの体系 **R** の完全性は次から得られる.

[**LR と R との関係定理**]
LR $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば, Δ 中の L 式 $\beta{:}B$ と Γ 中の L 式 $\alpha_1{:}A_1,\ldots,\alpha_n{:}A_n$ (ただし $n \geq 0$) が存在して, 次が成り立つ.

$$\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n = \beta, \quad \mathbf{R} \vdash A_1 \to (A_2 \to \cdots \to (A_n \to B) \cdots).$$

したがって, 特に **LR** $\vdash \Rightarrow \emptyset{:}A$ ならば **R** $\vdash A$ である.

LR に普通に ($\wedge$左), ($\wedge$右), ($\vee$左), ($\vee$右) を入れた体系を **LR**$^+$ と呼ぶことにする. **LR**$^+$ が, $\wedge$ と $\vee$ を自然に解釈するモデルに対して完全であることは簡単に証明できる ([10][1]). そのようなモデルに対して完全性が成り立つ論理式ベースの体系 (**R** に通常の $\wedge$, $\vee$ の公理とさらに特殊な公理を加えた体系 — この体系を **AR** と呼ぶ) は [5], [8] で与えられているが, 「**LR**$^+$ と **AR** との関係定理」をうまく示すことによって **AR** の完全性の簡潔な別証明が与えられるか, というのは興味深い問題である.

[**適切含意論理 E** (Entailmant)]

E は **R** の (公理 C) を

$$(\text{公理 C}^*)\!: \quad (A \to (\overrightarrow{B} \to C)) \to (\overrightarrow{B} \to (A \to C))$$

に弱めた体系である. ただし $\overrightarrow{B}$ は, これが $B_0 \to B_1$ という形の論理式であることを表す.

E モデルとは以下の条件を満たす組 $\langle W, \leq, I, \cdot, \mathbf{e}, \mathcal{V} \rangle$ である.

- $\langle W, \leq \rangle$ は順序集合 (可能世界の集合).
- $\langle I, \cdot, \mathbf{e} \rangle$ は単位元を持つ半束 (情報の集合).
- $\mathcal{V}$ は $W \times I$ の各要素に原子論理式の集合を割り当てる関数. そして $\mathcal{V}(x, \alpha)$ は以下の定義で論理式の集合へ拡張される.

  $A \to B \in \mathcal{V}(w, \beta) \iff \forall x \geq w, \forall \alpha \in I\ [A \in \mathcal{V}(x, \alpha)$ ならば $B \in \mathcal{V}(x, \alpha \cdot \beta)]$

[1] [10] の Fact 6 は誤りであると思われる — (反例?): $(A \vee B)_a \vdash A_a, B_a$

$A \in \mathcal{V}(w, \alpha)$ であることを $M, w, \alpha \models A$ と書く (M の可能世界 w で情報 α を過不足なく使って A が結論される). すべての可能世界 w について $M, w, \mathbf{e} \models A$ であることを $M \models A$ と書く.

E が E モデルに対して完全であることは [2]([17]) で証明されているが, 実はもっと強い次が成り立つ.

[**E の線形モデルに対する完全性と健全性**]
$\mathbf{E} \vdash A \quad \Longleftrightarrow \quad$ どんな線形 E モデル M に対しても $M \models A$.
ただし線形 E モデルとは, 可能世界集合が線形順序集合である E モデルのことである.

[**体系 TLE**] (線形 TL シーケントを扱う)

公理: $\quad \cdots \mid \alpha{:}A \Rightarrow \alpha{:}A \mid \cdots \quad$ (つまり **LR** の公理をあるノードとして持つ線形 TL シーケント)

推論規則:
(1)
ひとつのノードに対する (weakening 左) と (weakening 右).

(2)
$A{\to}B$ の A の形に応じて次の 2 種類の (→左).

$$\frac{\cdots \mid \mathit{\Gamma} \Rightarrow \mathit{\Delta}, \alpha{:}\overrightarrow{A} \mid \cdots \qquad \cdots \mid \alpha{\cup}\beta{:}B, \mathit{\Gamma} \Rightarrow \mathit{\Delta} \mid \cdots}{\cdots \mid \beta{:}\overrightarrow{A}{\to}B, \mathit{\Gamma} \Rightarrow \mathit{\Delta} \mid \cdots} \ (\to\text{左 }1)$$

$$\frac{\cdots \mid \alpha{\cup}\beta{:}B, \mathit{\Gamma} \Rightarrow \mathit{\Delta} \mid \cdots}{\cdots \mid \beta{:}p{\to}B, \alpha{:}p, \mathit{\Gamma} \Rightarrow \mathit{\Delta} \mid \cdots} \ (\to\text{左 }0) \quad (p\text{ は命題変数})$$

(3)
(→右) は次の形.

$$\frac{\cdots \mid \mathit{\Gamma} \Rightarrow \mathit{\Delta} \mid \{a\}{:}A \Rightarrow \{a\}{\cup}\beta{:}B \mid \cdots}{\cdots \mid \mathit{\Gamma} \Rightarrow \mathit{\Delta}, \beta{:}A{\to}B \mid \cdots} \ (\to\text{右})$$

ただし, a は結論の線形 TL シーケントの中のどんなラベルにも含まれない自然数である.

(4) ノードの左辺の $\overrightarrow{A}$ は自由に根の方向へ移動してよい.

$$\frac{\cdots \mid \mathit{\Gamma} \Rightarrow \mathit{\Delta} \mid \alpha{:}\overrightarrow{A}, \mathit{\Pi} \Rightarrow \mathit{\Sigma} \mid \cdots}{\cdots \mid \alpha{:}\overrightarrow{A}, \mathit{\Gamma} \Rightarrow \mathit{\Delta} \mid \mathit{\Pi} \Rightarrow \mathit{\Sigma} \mid \cdots} \ (\text{移動})$$

TLC や **LR** の完全性と同様にして, 次が証明される.

[**TLE の完全性定理**]
TLE $\nvdash \mathcal{T}$ ならば, ある線形 E ラベルモデル M が存在して次が成り立つ.

- $\mathcal{T}$ の線形木構造を M に埋め込むことができる.
- $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が $\mathcal{T}$ のあるノードで, 上の埋め込みでこのノードに可能世界 x が対応する場合には, x において Γ の要素はすべて真になり Δ の要素はすべて偽になる.

さらに, 論理式ベースの体系 **E** の完全性は次から得られる.

[**TLE と E との関係定理**]
$\mathcal{T} = \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0 \mid \cdots \mid \Gamma_m \Rightarrow \Delta_m$ とする. **TLE** $\vdash \mathcal{T}$ ならば, ある $n \le m$ とある $\beta{:}B \in \Delta_n$ が存在し, さらに $\Gamma_0, ..., \Gamma_n$ 中の適当な部分集合 $\Pi_0, ..., \Pi_n$ (つまり各 i について $\Pi_i \subseteq \Gamma_i$) が存在し, 次が成り立つ.

- $\bigcup\{\alpha \mid \alpha$ は $\Pi_0, ..., \Pi_n$ 中に現れるラベル $\} = \beta$.
- $\mathbf{E} \vdash \langle \tilde{\Pi}_0, ..., \tilde{\Pi}_n \rangle {\to} B$. ただし各 $\tilde{\Pi}_i$ は Π_i のすべての要素を適当な順序で重複出現も許して並べた列であり, $\langle A_1, ..., A_k \rangle {\to} B$ は論理式 $A_1{\to}(A_2{\to}\cdots{\to}(A_k{\to}B)\cdots)$ を表す.

したがって, 特に **TLE** $\vdash \Rightarrow \emptyset{:}A$ ならば $\mathbf{E} \vdash A$ である.
[**証明**]
TLE の証明図に関する帰納法による. 最後の規則が (→左 1), (→左 0), (移動) の場合には, それぞれ以下の推論が **E** でが admissible であることを用いる.

$$\frac{\langle \Gamma \rangle {\to} \overrightarrow{A} \quad \langle \Delta, B, \Sigma \rangle {\to} C}{\langle \mu\{\Delta; \overrightarrow{A} {\to} B; \Gamma\}, \Sigma \rangle {\to} C} \qquad \frac{\langle \Gamma, B, \Delta \rangle {\to} C}{\langle \Gamma, p{\to}B, p, \Delta \rangle {\to} C} \qquad \frac{\langle \Gamma, B, \overrightarrow{A}, \Delta \rangle {\to} C}{\langle \Gamma, \overrightarrow{A}, B, \Delta \rangle {\to} C}$$

ただし $\mu\{\}$ は「マージ演算」すなわち $\mu\{\Gamma_1; \Gamma_2; \Gamma_3\}$ は $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ を並べ替えた列で, 各 i についてこの列から Γ_i の要素だけを取り出すと, それはもとの Γ_i と同じ並び方をしているものである ([1] 参照).

5 厳密含意論理

ここでは命題論理を考える. 論理記号 $\wedge, \vee, \neg, \Box$ を持つ様相命題論理の言語を $\mathrm{L}^\Box$ とし, 論理記号 $\wedge, \vee, \neg, \to$ を持つ命題論理の言語を L^I とする. $\mathrm{L}^\Box$ の論理式から L^I への論理式への変換 ^{I} と, L^I の論理式から $\mathrm{L}^\Box$ への論理式への変換 $^\Box$ を次のように定める ($\top = X{\to}X$ (X は任意の論理式) とする).

A 中の $\Box B$ という部分をすべて $\top \to B$ に換えたのが A^I. A 中の $B \to C$ という部分をすべて $\Box(\neg B \vee C)$ に換えたのが $A^\Box$.

言語 $\mathrm{L}^\Box$ の様相論理 **S4** を特に $\mathbf{S4}^\Box$ と書く. 厳密含意 (strict implication) 論理とは

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{S4}^\Box \vdash A & \iff & \mathbf{S4}^I \vdash A^I \\
\mathbf{S4}^I \vdash A & \iff & \mathbf{S4}^\Box \vdash A^\Box
\end{array}
$$

を満たす $\mathbf{S4}^I$ のことである (と筆者は理解している). さらに, これと同じ関係で様相論理 $\mathbf{K}^\Box$, $\mathbf{KT}^\Box$, $\mathbf{K4}^\Box$ に対応する論理をそれぞれ $\mathbf{K}^I$, $\mathbf{KT}^I$, $\mathbf{K4}^I$ と書く. この節では, これらの論理に対してシーケント計算の体系と完全性証明を与える. ただしこれらは構造化されたシーケントを扱うのではなく, 完全性証明も「飽和シーケントをばらばらに作る」という従来の方法による.

$\mathbf{K}^I$ に対する Kripke モデルとは以下の性質を持つ組 $\langle W, \leq, \mathcal{V} \rangle$ である.

- W は非空集合, $\leq$ は W 上の 2 項関係.
- $\mathcal{V}$ は W の各要素 k に原子論理式の集合を割り当てる関数. そして以下の定義によって $\mathcal{V}(k)$ は論理式の集合へ拡張される.

$$
\begin{array}{l}
A \wedge B \in \mathcal{V}(k) \iff A \in \mathcal{V}(k) \text{ かつ } B \in \mathcal{V}(k). \\
A \vee B \in \mathcal{V}(k) \iff A \in \mathcal{V}(k) \text{ または } B \in \mathcal{V}(k). \\
\neg A \in \mathcal{V}(k) \iff A \notin \mathcal{V}(k). \\
A \to B \in \mathcal{V}(k) \iff \forall l \geq k \; [A \in \mathcal{V}(l) \text{ ならば } B \in \mathcal{V}(l)].
\end{array}
$$

モデル $M = \langle W, \leq, D, \mathcal{V} \rangle$ において $A \in \mathcal{V}(k)$ であることを $M, k \models A$ と書く. W のすべての要素 k について $M, k \models A$ であることを $M \models A$ と書く.

$\mathbf{K}^I$, $\mathbf{KT}^I$, $\mathbf{K4}^I$, $\mathbf{S4}^I$ を次のようにセマンティカルに定義してもよい.

$(\mathbf{K}^I/\mathbf{KT}^I/\mathbf{K4}^I/\mathbf{S4}^I) \vdash A$

$\Updownarrow$

どんな (モデル/反射的モデル/推移的モデル/反射推移的モデル) M についても $M \models A$.

[**体系** $\mathbf{GK}^I$] (通常のシーケントを扱う)
LK の命題論理部分から ($\to$右) と ($\to$左) を削除し, 代わりに次を入れる.

$$
\frac{\mathit{\Delta}_1, A \Rightarrow B, \mathit{\Gamma}_1 \quad \mathit{\Delta}_2, A \Rightarrow B, \mathit{\Gamma}_2 \quad \cdots \quad \mathit{\Delta}_{2^n}, A \Rightarrow B, \mathit{\Gamma}_{2^n}}{C_1 \to D_1, ..., C_n \to D_n \Rightarrow A \to B} \; (\to)
$$

ただし $n \geq 0$, $\Gamma_i = \{C_j \mid j \in \gamma(i)\}$, $\Delta_i = \{D_j \mid j \in \delta(i)\}$ で, $\gamma(i)$ と $\delta(i)$ は以下で定義される自然数の集合である: $\{1, ..., n\}$ のすべての分割を列挙 (この分割の個数は 2^n である) して, $\langle\delta(i), \gamma(i)\rangle$ が i 番目の分割になるようにする. たとえば $n = 0, 1, 2$ の場合, 規則 $(\to)$ は次のようになる.

$$\frac{A \Rightarrow B}{\Rightarrow A \to B}\,(\to) \qquad \frac{A \Rightarrow B, C_1 \quad D_1, A \Rightarrow B}{C_1 \to D_1 \Rightarrow A \to B}\,(\to)$$

$$\frac{A \Rightarrow B, C_1, C_2 \quad D_2, A \Rightarrow B, C_1 \quad D_1, A \Rightarrow B, C_2 \quad D_1, D_2, A \Rightarrow B}{C_1 \to D_1, C_2 \to D_2 \Rightarrow A \to B}\,(\to)$$

[**体系 $\mathbf{GKT}^I$**]
$\mathbf{GK}^I$ + ($\to$左).

[**体系 $\mathbf{GK4}^I$**]
$\mathbf{GK}^I$ の $(\to)$ を次の $(\to 4)$ に変えた体系.

$$\frac{\Delta_1, \Psi, A \Rightarrow B, \Gamma_1 \quad \Delta_2, \Psi, A \Rightarrow B, \Gamma_2 \quad \cdots \quad \Delta_{2^n}, \Psi, A \Rightarrow B, \Gamma_{2^n}}{C_1 \to D_1, ..., C_n \to D_n \Rightarrow A \to B}\,(\to 4)$$

ただし $n \geq 0$, $\Psi = C_1 \to D_1, ..., C_n \to D_n$ で, Γ_i と Δ_i は規則 $(\to)$ と同じ.

[**体系 $\mathbf{GS4}^I$**]
$\mathbf{GK4}^I$ + ($\to$左).

[**$\mathbf{GK}^I$, $\mathbf{GKT}^I$, $\mathbf{GK4}^I$, $\mathbf{GS4}^I$ の完全性定理**]
$(\mathbf{GK}^I/\mathbf{GKT}^I/\mathbf{GK4}^I/\mathbf{GS4}^I) \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \Longrightarrow$ ある (モデル/反射的モデル/推移的モデル/反射推移的モデル) M について $M \not\models \bigvee \neg\Gamma \vee \bigvee \Delta$.

[**証明**]($\mathbf{GK4}^I$ について示す. 他も同様にできる)
１節の ($\wedge$左飽和), ($\wedge$右飽和), ($\vee$左飽和), ($\vee$右飽和), ($\neg$左飽和), ($\neg$右飽和) の条件を満たす証明できないシーケントを飽和シーケントと呼ぶ. $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が $\mathbf{GK4}^I$ で証明できないときに次のようにモデル $M = \langle W, \leq, \mathcal{V}\rangle$ を定義する.

> W は $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の部分論理式だけから成る飽和シーケント全体の集合.
>
> $(\Pi \Rightarrow \Sigma) \leq (\Phi \Rightarrow \Psi) \quad \Longleftrightarrow$
> $\qquad \forall (A \to B) \in \Pi\ [(A \in \Psi \text{ or } B \in \Phi) \text{ and } (A \to B \in \Phi)]$.
>
> $\mathcal{V}(\Pi \Rightarrow \Sigma) = \{p \mid p \in \Pi\}$.

するとこれは推移的モデルになり, W の任意の要素 $\Pi \Rightarrow \Sigma$ についてそこで Π 中のすべての論理式が真になり Σ 中のすべての論理式が偽になる. はじめに与えれた $\Gamma \Rightarrow \Delta$ については, それを拡張した $(\Gamma^+ \Rightarrow \Delta^+) \in W$ が存在するので,

そこで $\bigvee\neg\Gamma\vee\bigvee\Delta$ が偽になる. ∎

上のシーケント計算の体系を, $(\Gamma \Rightarrow \Delta)^* = \bigvee\neg\Gamma\vee\bigvee\Delta$ ですべて翻訳すれば, $\mathbf{K}^I$, $\mathbf{KT}^I$, $\mathbf{K4}^I$, $\mathbf{S4}^I$ の論理式ベースの体系ができる. これらの論理に対する論理式ベースの公理化は [6] でも与えられているが, それらは上記の翻訳によって得られる体系とは異なっている.

$\mathbf{S4}^I$ の別のシーケント計算の体系に, **LK** の (→右) を

$$\frac{C_1{\to}D_1, ..., C_n{\to}D_n, A \Rightarrow B}{C_1{\to}D_1, ..., C_n{\to}D_n \Rightarrow A{\to}B}\ (\to\text{右}_K)$$

に変えた体系があるが ([14]), (→左) と (→右 $_K$) によって (→4) が derivable である. また, 論理記号を → だけに限定した場合には, $\mathbf{S4}^I$ に対するシーケント計算には多くのバリエーションがある ([12]).

規則 (→), (→4), (→左) 中に $X{\to}Y$ という形の論理式があるとき, これを $\Box Y$ に替えて, X を $\top$ に替えた規則を考える (変換 ^{I} の逆). すると「$\top$ を右辺に含むシーケントは証明できる」「左辺に含まれる $\top$ は無意味」という事実と合わせると, これらの規則はそれぞれ次のよく知られた様相論理のシーケント計算の規則になる.

$$\frac{\Delta \Rightarrow B}{\Box\Delta \Rightarrow \Box B} \qquad \frac{\Box\Delta, \Delta \Rightarrow B}{\Box\Delta \Rightarrow \Box B} \qquad \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

References

[1] A.R. Anderson and N.D. Belnap Jr., **Entailment: The Logic of Relevance and Necessity, Vol. 1**, (Princeton 1975).

[2] A.R. Anderson, N.D. Belnap Jr. and J.M. Dunn. **Entailment: The Logic of Relevance and Necessity, Vol. 2**, (Princeton 1992).

[3] A. Avron, *The Method of Hypersequents in the Proof Theory of Propositional Non-classical Logics*, in **Logic: from Foundations to Applications, European Logic Colloquium** (edited by W Hodges, M.Hyland, C.Steinhorn, and J.Truss) Oxford (1996).

[4] S.R. Buss, *An Introduction to Proof Theory*, in **Handbook of Proof Theory** (edited by S.R.Buss), Elsevier (1998).

[5] G. Charlwood, *An axiomatic version of positive semilattice relevance logic*, **Journal of Symbolic Logic 46**, 233-239, (1981).

[6] G. Corsi, *Weak Logics with Strict Implications*, **Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 33**, 389-406, (1987).

[7] G. Corsi, *Completeness Theorem for Dummett's LC Quantified and Some of Its Extensions*, **Studia Logica 51**, 317-335, (1992).

[8] K. Fine, *Completeness for the semilattice semantics with disjunction and conjunction* (abstract), **Journal of Symbolic Logic, 41**, 560, (1976).

[9] D.M. Gabbay, **Labelled Deductive Systems, Vol.1**, Oxford (1996).

[10] S. Giambrone and A. Urquhart, *Proof theories for semilattice logics*, **Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 33**, 433-439 (1987).

[11] S. Görnemann, *A logic stronger than intuitionism*, **Journal of Symbolic Logic, 36**, 249-261, (1971).

[12] R. Kashima and N. Kamide, *Substructural implicational logics including the relevant logic E*, **Studia Logica** (to appear).

[13] R. Kashima and T. Shimura, *Cut-elimination theorem for the logic of constant domains*, **Mathematical Logic Quarterly, 40**, 153-172, (1994).

[14] S.A. Kripke, *The problem of entailment* (abstract), **Journal of Symbolic Logic 24**, 324, (1959).

[15] 小野寛晰, ＬＤについて (その２) (unpublished) (1976).

[16] G. Takeuti, **Proof Theory** (2nd ed.), North-Holland (1987).

[17] A. Urquhart, *Semantics for relevant logics*, **Journal of Symbolic Logic 37**, 159-169, (1972).